Complex Ginzburg-Landau type p-heat equations with singular potentials

横田 智巳

東京理科大学理学研究科数学専攻 D3

E-mail: yokota@minserver.ma.kagu.sut.ac.jp

1. 序

Ω は $\mathbf{R}^N$ $(N \in \mathbf{N})$ の有界領域とする．$L^2(\Omega) := L^2(\Omega; \mathbf{C})$ において次の初期値境界値問題の解の存在について考える:

$$
\text{(P)} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - (\lambda + i\alpha)\Delta_p u + (\kappa + i\beta)\dfrac{1}{|x|^p}|u|^{p-2}u = 0 & \text{on } \ \Omega \times (0, \infty), \\ u = 0 & \text{on } \ \partial\Omega \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \Omega. \end{cases}
$$

ここで，$\Delta_p u := \mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$，$1 < p < \infty$，$\lambda > 0$，$\kappa > 0$，$\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ で，u は $(x,t) \in \overline{\Omega} \times [0, \infty)$ を変数とする複素数値の未知関数である．(P) で特に $\alpha = \beta = 0$ とおいて得られる熱方程式の解の存在・非存在については，$p = 2$ のとき Baras-Goldstein [**2**] によって，$1 < p < N$ のとき Aguilar Crespo & Peral Alonso [**1**]，Garcia Azorero & Peral Alonso [**6**] によって，それぞれ研究されている．(P) は方程式の拡散項と反応項の前に複素係数がかかったものであり，[**1**]，[**2**]，[**6**] の方法は直接使えない．一方，(P) における方程式によく似た方程式として [**8**] で扱われている複素 Ginzburg-Landau 型方程式

$$
(\mathrm{CGL})_p \qquad \frac{\partial u}{\partial t} - (\lambda + i\alpha)\Delta_p u + (\kappa + i\beta)|u|^{q-2}u - \gamma u = 0
$$

があげられる．特に $(\mathrm{CGL})_2$ が複素 Ginzburg-Landau 方程式である．[**8**] では劣微分作用素の理論（Brezis [**3**]，[**4**]）を複素化することにより，$(\mathrm{CGL})_p$ の解作用素の平滑化効果（初期値 $u_0 \in L^2(\Omega)$ に対する強解の存在）が証明されている．本講演では，[**8**] の方法を少し修正し，$p \geq N$ のときも含めて (P) の解の存在と平滑化効果を証明したい．

2. 抽象的設定

複素 Hilbert 空間 $H := L^2(\Omega) = L^2(\Omega; \mathbf{C})$（内積，ノルムをそれぞれ $(\cdot,\cdot)$, $\|\cdot\|$ とあらわす）において，2 つの適正下半連続凸関数 $\varphi, \psi : H \to [0,\infty]$ を次のように定義する:

$$\varphi(u) := \begin{cases} \dfrac{1}{p}\displaystyle\int_\Omega |\nabla u(x)|^p\,dx & \text{if } \ u \in D(\varphi) := W_0^{1,p}(\Omega) \cap H, \\ \infty & \text{otherwise}, \end{cases}$$

$$\psi(u) := \begin{cases} \dfrac{1}{p}\displaystyle\int_\Omega \frac{|u(x)|^p}{|x|^p}\,dx & \text{if } \ u \in D(\psi) := \left\{ u \in H; \dfrac{u}{|x|} \in L^p(\Omega) \right\}, \\ \infty & \text{otherwise}. \end{cases}$$

このとき，φ, ψ の劣微分 $\partial\varphi$, $\partial\psi$ はそれぞれ次のように与えられる:

$$\partial\varphi(u) = -\Delta_p u \quad \text{for } \ u \in D(\partial\varphi) := \{ u \in D(\varphi); \Delta_p u \in H \},$$

$$\partial\psi(u) = \frac{1}{|x|^p}|u|^{p-2}u \quad \text{for } \ u \in D(\partial\psi) := \left\{ u \in D(\psi); \frac{1}{|x|^p}|u|^{p-2}u \in H \right\}.$$

したがって，(P) は次のような抽象的発展方程式の初期値問題とみなされる:

$$\text{(ACP)} \qquad \begin{cases} \dfrac{du}{dt} + (\lambda + i\alpha)\partial\varphi(u) + (\kappa + i\beta)\partial\psi(u) = 0, \ \ t > 0, \\ \hfill u(0) = u_0. \end{cases}$$

第 3 節では，$D(\partial\varphi) \cap D(\partial\psi)$ を定義域とする作用素 $(\lambda + i\alpha)\partial\varphi + (\kappa + i\beta)\partial\psi$ が H で極大単調であることを示し，任意の初期値 $u_0 \in D(\partial\varphi) \cap D(\partial\psi)$ に対して (ACP) の大域的強解が一意的に存在することを示す．第 4 節では，解のアプリオリ評価を準備して，許される初期値の範囲を H 全体に拡げる．

3. $(\lambda + i\alpha)\partial\varphi + (\kappa + i\beta)\partial\psi$ の極大単調性

作用素 A が H で極大単調であるとは次をみたすときをいう:

$$\begin{cases} \mathrm{Re}(Au_1 - Au_2, u_1 - u_2) \geq 0 \quad \text{for } \ u_1, u_2 \in D(A), \\ R(\zeta + A) = H \quad \text{for } \ \zeta \in \mathbf{C} \ \text{ with } \ \mathrm{Re}\,\zeta > 0. \end{cases}$$

$(\lambda + i\alpha)\partial\varphi + (\kappa + i\beta)\partial\psi$ の極大単調性を示すために 2 つの補題を準備する．

補題 3.1. $\lambda > 0$，$\kappa > 0$，$c_p := \dfrac{|p-2|}{2\sqrt{p-1}}$ $(1 < p < \infty)$ とする．そのとき

(i) $\dfrac{|\alpha|}{\lambda} \le \dfrac{1}{c_p}$ ならば，$(\lambda + i\alpha)\partial\varphi$ は H で極大単調である．

(ii) $\dfrac{|\beta|}{\kappa} \le \dfrac{1}{c_p}$ ならば，$(\kappa + i\beta)(\partial\psi)_n$ $(n \in \mathbf{N})$ は H で極大単調である．

ここで，$(\partial\psi)_n$ は $\partial\psi$ の吉田近似である: $(\partial\psi)_n := n(1 - (1 + n^{-1}\partial\psi)^{-1})$.

補題 3.2. $1 < p < \infty$，$\lambda > 0$，$\dfrac{|\alpha|}{\lambda} < \dfrac{1}{c_p}$ とする．そのとき

$$\mathrm{Re}(\lambda + i\alpha)(\partial\varphi(u), (\partial\psi)_n u) \ge -c(\lambda, \alpha, p)\|(\partial\psi)_n u\|^2, \ \ u \in D(\partial\varphi), \ n \in \mathbf{N}$$

が成立する．ここで，$c(\lambda, \alpha, p)$ は次で与えられる定数である:

$$c(\lambda, \alpha, p) := \begin{cases} \dfrac{(\lambda + \sqrt{p-1}|\alpha|)^p}{(\lambda - c_p|\alpha|)^{p-1}} & \text{if } 1 < p < 2 \le N, \\[2ex] (p-1)^{p-1}\dfrac{(\lambda + \frac{1}{\sqrt{p-1}}|\alpha|)^p}{(\lambda - c_p|\alpha|)^{p-1}} & \text{if } 2 \le p < \infty. \end{cases}$$

さて，$(\lambda + i\alpha)\partial\varphi + (\kappa + i\beta)\partial\psi$ の極大単調性を証明しよう．$\lambda > 0$，$\kappa > 0$，$\dfrac{|\alpha|}{\lambda} < \dfrac{1}{c_p}$，$\dfrac{|\beta|}{\kappa} \le \dfrac{1}{c_p}$ とする．単調性は補題 3.1 (i) と (ii) で $n \to \infty$ としたものから明らかである．極大性を示すために次の近似方程式を考える:

$$u_n + (\lambda + i\alpha)\partial\varphi(u_n) + (\kappa + i\beta)(\partial\psi)_n u_n = f. \tag{3.1}$$

$(\kappa + i\beta)(\partial\psi)_n$ が H 上単調かつ Lipschitz 連続であるから，任意の $n \in \mathbf{N}$ と $f \in H$ に対して (3.1) が一意解 $u_n \in D(\partial\varphi)$ をもつことは容易に示される．次に，(3.1) と $(\partial\psi)_n u_n$ との内積の実部をとると

$$\begin{aligned} &\mathrm{Re}((\partial\psi)_n u_n, u_n) + \mathrm{Re}(\lambda + i\alpha)(\partial\varphi(u_n), (\partial\psi)_n u_n) + \kappa\|(\partial\psi)_n u_n\|^2 \\ &= \mathrm{Re}((\partial\psi)_n u_n, f) \end{aligned}$$

が得られる．左辺第 1 項は非負であることに注意し，左辺第 2 項に補題 3.2 を，右辺に Schwarz の不等式を適用すれば

$$(\kappa - c(\lambda, \alpha, p))\|(\partial\psi)_n u_n\| \le \|f\|$$

が得られる．したがって，$\kappa > c(\lambda,\alpha,p)$ ならば $\{\|(\partial\psi)_n u_n\|\}$ は有界であり，Brezis-Crandall-Pazy の定理 [**5**, Theorem 2.1]（Showalter [**9**, Proposition IV.2.1] も参照）により $(\lambda+i\alpha)\partial\varphi+(\kappa+i\beta)\partial\psi$ が極大単調であることが従う．さらに，非線形半群理論（Kato [**7**], [**9**, Proposition IV.3.1]）を用いると次の定理が得られる．

定理 3.3. $1<p<\infty$, $\lambda>0$, $\kappa>0$, $\dfrac{|\alpha|}{\lambda}<\dfrac{1}{c_p}$, $\dfrac{|\beta|}{\kappa}\le\dfrac{1}{c_p}$, $\kappa>c(\lambda,\alpha,p)$ (c_p, $c(\lambda,\alpha,p)$ はそれぞれ補題3.1，補題3.2で与えた定数) とする．そのとき，任意の初期値 $u_0\in D(\partial\varphi)\cap D(\partial\psi)$ に対して，次の性質をもつような (ACP) の大域的強解 $u(\cdot)$ が一意的に存在する:

(i) $u(\cdot)\in C^{0,1}([0,\infty);H)$.

(ii) $u(t)\in D(\partial\varphi)\cap D(\partial\psi)\ \forall\, t\ge 0$.

(iii) $\partial\varphi(u(\cdot))$, $\partial\psi(u(\cdot))$, $(du/dt)(\cdot)\in L^\infty(0,\infty;H)$.

(iv) $u(\cdot)$ は $(0,\infty)$ 上 a.e. で強微分可能で (ACP) をみたす．

(v) $u(\cdot)$ は $[0,\infty)$ 上右微分可能で

$$d^+u/dt+(\lambda+i\alpha)\partial\varphi(u)+(\kappa+i\beta)\partial\psi(u)=0.$$

(vi) 関数 $t\mapsto\|(d^+u/dt)(t)\|$ は $[0,\infty)$ 上非増加である．

(vii) $v(\cdot)$ を初期値 $v_0\in D(\partial\varphi)\cap D(\partial\psi)$ に対する (ACP) の解とすると

$$\|u(t)-v(t)\|\le\|u_0-v_0\|\ \ \forall\, t\ge 0$$

が成立する．

4. 解作用素の平滑化効果

まず，次の補題を準備する．

補題 4.1. 定理3.3の仮定がみたされているとし，$u(\cdot)$ を初期値 $u_0\in D(\partial\varphi)\cap D(\partial\psi)$ に対する (ACP) の解とする．そのとき，次の不等式が成立する:

$$\|\partial\varphi(u(t))\|+\|\partial\psi(u(t))\|\le\frac{K}{t}\|u_0\|\ \ \forall\, t>0. \tag{4.1}$$

ここで，K は $\lambda,\kappa,\alpha,\beta,p$ にのみ依存した正定数である．

次に，稠密性（$\overline{D(\partial\varphi)\cap D(\partial\psi)}=H$）と劣微分作用素の demiclosedness により，許される初期値の範囲を H 全体に拡げることができる:

定理 4.2. 定理 3.3 の仮定がみたされているとする．そのとき，任意の初期値 $u_0\in H$ に対して，次の性質をもつような (ACP) の大域的強解 $u(\cdot)$ が一意的に存在する:

(i) $u(\cdot)\in C([0,\infty);H)\cap C^{0,1}([\delta,\infty);H)\ \forall\,\delta>0.$

(ii) $u(t)\in D(\partial\varphi)\cap D(\partial\psi)\ \forall\,t>0.$

(iii) $\partial\varphi(u(\cdot))$, $\partial\psi(u(\cdot))$, $(du/dt)(\cdot)\in L^\infty(\delta,\infty;H)\ \forall\,\delta>0$．さらに (4.1) が成立する.

(iv) $u(\cdot)$ は $(0,\infty)$ 上 a.e. で強微分可能で (ACP) をみたす.

(v) $u(\cdot)$ は $(0,\infty)$ 上右微分可能で

$$d^+u/dt+(\lambda+i\alpha)\partial\varphi(u)+(\kappa+i\beta)\partial\psi(u)=0.$$

(vi) 関数 $t\mapsto\|(d^+u/dt)(t)\|$ は $(0,\infty)$ 上非増加である.

(vii) $v(\cdot)$ を初期値 $v_0\in H$ に対する (ACP) の解とすると

$$\|u(t)-v(t)\|\le\|u_0-v_0\|\ \ \forall\,t\ge 0$$

が成立する.

参考文献

[1] J. A. Aguilar Crespo and I. Peral Alonso, Global behavior of the Cauchy problem for some critical nonlinear parabolic equations, *SIAM J. Math. Anal.* **31** (2000), 1270–1294.

[2] P. Baras and J. A. Goldstein, The heat equation with a singular potential, *Trans. Amer. Math. Soc.* **284** (1984), 121–139.

[3] H. Brezis, "Operateurs Maximaux Monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert," Mathematics Studies, 5, North-Holland/American Elsevier, New York, 1973.

[4] H. Brezis, Monotonicity methods in Hilbert spaces and some applications to nonlinear partial differential equations, Symposium on Nonlinear Functional Analysis (Madison, 1971), 101–156, *Contribution to Nonlinear Functional Analysis*, Academic Press, New York, 1971.

[5] H. Brezis, M. Crandall and A. Pazy, Perturbations of nonlinear maximal monotone sets in Banach spaces, *Comm. Pure Appl. Math.* **23** (1970), 123–144.

[6] J. P. Garcia Azorero and I. Peral Alonso, Hardy inequalities and some critical elliptic and parabolic problems, *J. Differential Equations* **144** (1998), 441–476.

[7] T. Kato, Nonlinear semigroups and evolution equations, *J. Math. Soc. Japan* **19** (1967), 508–520.

[8] N. Okazawa and T. Yokota, Global existence and smoothing effect for the complex Ginzburg-Landau equation with p-Laplacian, preprint (2000).

[9] R. E. Showalter, "Monotone Operators in Banach Space and Nonlinear Partial Differential Equations," Math. Surv. Mono. vol. 49, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997.