時間周期的に変動する一様電場中での多体量子力学系に対する散乱理論

足立 匡義 (神戸大学理学部)

この講演では、時間周期的に変動する一様電場中での多体量子力学系に対する散乱理論について述べる。

与えられた時間周期的変動外電場 $\mathcal{E}(t) \in \boldsymbol{R}^d$ $(\mathcal{E}(t) \not\equiv 0)$ 内を運動する N 体量子力学系を考える。質量中心座標系においては、考えるべきハミルトニアンは $L^2(X)$ 上の作用素で

$$H(t) = -\frac{1}{2}\Delta - E(t)\cdot x + V, \quad V = \sum_{1\le j<k\le N} V_{jk}(r_j - r_k)$$

という形をしている。但し、X は質量中心座標系での配位空間 ($\boldsymbol{R}^{d\times N}$ の部分空間である) 、Δ は X 上の Laplace-Beltrami 作用素 ($\boldsymbol{R}^{d\times N}$ 及び X には各粒子の質量を用いた計量を入れている) 、V_{jk} は j 番目の粒子と k 番目の粒子の間の相互作用ポテンシャルである。また $E(t)$ は、$\mathcal{E}(t)$ と各粒子の質量および電荷から定められる X に属するベクトルであり、$\pi : \boldsymbol{R}^{d\times N} \to X$ で $\boldsymbol{R}^{d\times N}$ から X への正射影を表すと、

$$E(t) = \pi\left(\frac{e_1}{m_1}\mathcal{E}(t), \dots, \frac{e_N}{m_N}\mathcal{E}(t)\right)$$

で表される。但し、j 番目の粒子の質量と電荷をそれぞれ m_j と e_j で表している。考えている系内の粒子を質量と電荷の比 (比電荷) で分類した場合、比電荷が二種類以上あるならば、$\mathcal{E}(t) \not\equiv 0$ のとき $E(t) \not\equiv 0$ となり、一種類しかないならば、$\mathcal{E}(t) \not\equiv 0$ であっても $E(t) \equiv 0$ となる。そこで、この講演では、考えている系には二種類以上の比電荷があるという仮定をおき、その仮定の下で、ハミルトニアン $H(t)$ に対する散乱理論を考える。

ここで述べる結果を得るためには、もう一つ重要な仮定を時間周期的変動外電場 $\mathcal{E}(t)$ に課すことになる。それは、$\mathcal{E}(t)$ の時間平均 $\mathcal{E}$ がゼロではないという仮定である：

$$\mathcal{E} = \frac{1}{T}\int_0^T \mathcal{E}(t)\,dt \neq 0.$$

但し、$T > 0$ は $\mathcal{E}(t)$ の周期である。このとき更に、相互作用ポテンシャル $V_{jk}(r_j - r_k)$ に短距離型、長距離型の条件を課したとき、それぞれ通常の波動作用素、修正波動作用素が存在して、漸近完全性が成立するということがこの講演で述べたい結果である。

先にポテンシャルについての仮定を述べる。

$(\mathrm{V})_{c,S}$ (短距離型) 比電荷が等しい j 番目の粒子と k 番目の粒子の間の相互作用ポテンシャル $V_{jk}(r)$ は $C^\infty(\boldsymbol{R}^d)$ に属する実数値関数で、

$$|\partial^\beta V_{jk}(r)| \le C_\beta \langle r\rangle^{-(\rho'+|\beta|)}$$

をある $\rho' > 1$ に対して満たしている。

$(\mathrm{V})_{c,L}$ (長距離型) 比電荷が等しい j 番目の粒子と k 番目の粒子の間の相互作用ポテンシャル $V_{jk}(r)$ は $C^\infty(\boldsymbol{R}^d)$ に属する実数値関数で、

$$|\partial^\beta V_{jk}(r)| \leq C_\beta \langle r \rangle^{-(\rho'+|\beta|)}$$

を $\sqrt{3}-1 < \rho' \leq 1$ なるある ρ' に対して満たしている。

$(\mathrm{V})_{\bar{c}}$ (Stark 効果における短距離型) 比電荷が異なる j 番目の粒子と k 番目の粒子の間の相互作用ポテンシャル $V_{jk}(r)$ は $C^\infty(\boldsymbol{R}^d)$ に属する実数値関数で、

$$|\partial^\beta V_{jk}(r)| \leq C_\beta \langle r \rangle^{-(\rho+|\beta|)/2}$$

をある $\rho > 1$ に対して満たしている。

波動作用素を定義するためにいくつか準備をする。クラスターハミルトニアンと呼ばれる $L^2(X)$ 上の作用素を

$$H_a(t) = -\frac{1}{2}\Delta - E(t)\cdot x + V^a$$

で定義する。但し、a はクラスター分解と呼ばれるもので、$\{1,\ldots,N\}$ の空でない部分集合 (クラスターと呼ばれる) による直和分解のことであり、V^a はその a に応じて定められるポテンシャルであるが、a に属する同じクラスター内の粒子の間の相互作用ポテンシャルだけを足し合わせたものである。このハミルトニアンによって、a で表される幾つかの塊 (クラスター) になり、その塊同士は相互作用しないで散乱する状態を支配することになる。今、$U(t,s)$ と $U_a(t,s)$ でそれぞれハミルトニアン $H(t)$ と $H_a(t)$ によって生成される時間発展作用素を表すことにする。これらの存在と一意性は、谷島氏の結果と Avron-Herbst の公式を利用すれば保証される。クラスター分解 a について、a に属する各クラスター内では粒子の比電荷が全て等しいとき、$a \subset c$ で表すことにする (実は、c は系の粒子を比電荷で分類したときにできるクラスター分解である)。$a \subset c$ なる a に対しては、a に属する各クラスター内の、質量中心座標系での運動を記述するハミルトニアンの和 (部分系ハミルトニアンと呼ばれる) $H^a(t)$ が時間 t に依存しないという重要な性質がある。これは、同じクラスター内の粒子の比電荷が等しいため、外電場から受ける加速度は全て等しくなり、クラスターの質量中心座標系に移れば電場の影響はなくなるからである。そこで、その $H^a(t)$ を $H^a := -\Delta^a/2 + V^a$ で表すと、$L^2(X) = L^2(X^a) \otimes L^2(X_a)$ において

$$U_a(t,s) = e^{-i(t-s)H^a} \otimes \bar{U}_a(t,s)$$

のように分解できる。この点が重要である。但し、X^a は a に属する各クラスターの内部の運動を記述する配位空間で、X_a は X における X^a の直交補空間である。条件 $(\mathrm{V})_{c,S}$ と $(\mathrm{V})_{\bar{c}}$ の下で、$a \subset c$ なる a に対して通常の波動作用素 $W_a^\pm(s)$, $s \in \boldsymbol{R}$, を

$$W_a^\pm(s) = \mathrm{s}\text{-}\lim_{t\to\pm\infty} U(t,s)^* U_a(t,s)(P^a \otimes Id)$$

で定義する。但し、$P^a : L^2(X^a) \to L^2(X^a)$ は H^a の固有空間への正射影である。一方、条件 $(\mathrm{V})_{c,L}$ と $(\mathrm{V})_{\bar{c}}$ の下で、$a \subset c$ なる a に対して修正波動作用素 $W_{a,D}^\pm(s)$, $s \in \boldsymbol{R}$, を

$$W_{a,D}^\pm(s) = \mathrm{s}\text{-}\lim_{t\to\pm\infty} U(t,s)^* U_{a,D}(t,s)(P^a \otimes Id)$$

で定義する。但し、$I_a = V - V^a$, $I_a^c = I_a - I_c$ として、$p_a = -i\nabla_a$ を $L^2(X_a)$ の速度作用素としたとき、$U_{a,D}(t,s)$ は

$$U_{a,D}(t,s) = U_a(t,s)e^{-i\int_s^t I_a^c(p_a u)\,du}$$

で定義される。このとき、この講演で述べたい結果は次の通りである。

定理 1. $(\mathrm{V})_{c,S}$ と $(\mathrm{V})_{\bar{c}}$ を満たしていると仮定する。このとき、波動作用素 $W_a^{\pm}(s)$, $a \subset c$, $s \in \boldsymbol{R}$, が存在して、漸近完全性が成立する：

$$L^2(X) = \sum_{a \subset c} \oplus \mathrm{Ran}\, W_a^{\pm}(s).$$

定理 2. $(\mathrm{V})_{c,L}$ と $(\mathrm{V})_{\bar{c}}$ を満たしていると仮定する。このとき、修正波動作用素 $W_{a,D}^{\pm}(s)$, $a \subset c$, $s \in \boldsymbol{R}$, が存在して、漸近完全性が成立する：

$$L^2(X) = \sum_{a \subset c} \oplus \mathrm{Ran}\, W_{a,D}^{\pm}(s).$$

証明の鍵となるのは、比電荷の異なる粒子同士は漸近的には同じクラスター内に留まることができない、ということを表す漸近クラスタリングと呼ばれる性質を示すことである。それを示すためには、まず考えている系を適当な加速度系に移行し、外電場の振動部分を取り除いて、外電場が定電場となるようにする。その代わり、相互作用ポテンシャルの方には、この移行から来る時間周期的依存性が現れる。このようにして得られた時間周期的ハミルトニアンに対する散乱理論を、Howland-Yajima の方法を基礎にして解析するというのが大雑把な方針である。