

Bäcklund 変換により生成される Hongyou WU の方程式の一連の解について

平田 均 (上智大学理工学部)

2003/1/25: 東京理科大学 神楽坂セミナー

Bäcklund 変換は、非線形偏微分方程式、特に「可積分系」において重要な道具であり、その方程式の新たな厳密解を得るのに大きな力を発揮する。H.Wu は 1995 年の彼の論文 [1] において、Wahlquist&Estabrook[2] のアイデアに基づき非線形偏微分方程式とそれに付随した可積分系という対を考え、その対について偏微分方程式の Bäcklund 変換を与えている。特に彼の論文では、3 階の方程式

$$u_{xxx} = \mathcal{F}(u, u_x, u_t) \quad (1)$$

で、その Bäcklund 変換が u, u_x, u_{xx} および (1) に付随する方程式系 (可積分条件 $\phi_{xt} = \phi_{tx}$ が (1) と同値になっている)

$$\begin{aligned} \phi_x &= \Omega(\phi, u, u_x, u_{xx}), \\ \phi_t &= \Theta(\phi, u, u_x, u_{xx}), \end{aligned}$$

の解 ϕ だけを含む場合を考え、そのような式は、適当にスケール変換すれば

$$\begin{aligned} u_{xxx} &= -6uu_x + u_t, \\ u_{xxx} &= \left(q_0 \pm \frac{3}{2}u^2 \right) u_x + u_t, \\ u_{xxx} &= p_0 + q_0u_x + 3u_x^2 + u_t, \\ u_{xxx} &= p_0 + q_0u_x \pm \frac{1}{2}u_x^3 + u_t, \\ u_{xxx} &= p_0 + q_0u_x + \frac{3}{2}u_x^2 - \frac{1}{2}u_x^3 + u_t, \quad (q_0 < -1), \\ u_{xxx} &= p_0 + q_0u_x + \frac{3}{2}u_x^2 + \frac{1}{2}u_x^3 + u_t, \quad (q_0 > 1), \\ u_{xxx} &= \left(q_0 - \frac{3}{2}\sin 2u \right) u_x - \frac{1}{2}u_x^3 + u_t, \end{aligned} \quad (2)$$

の7つに決まる事を示している。ここで始めの6つの式はKdV方程式やそれに関係する方程式だが、最後の方程式(2)はそれらとはかなり異なった形をしている。

この講演では、(2) (ただし $q_0 = 0$) と [1] で与えられているその Bäcklund 変換

$$u \mapsto v = n\pi - 2\tau(\phi) - u, \quad n \in \mathbf{Z}, \quad (3)$$

によって、(2) の厳密解が解析的に計算できる事を示し、その性質を述べる。ここで ϕ は、(2) に付随する可積分系

$$\begin{aligned} \phi_x &= \sin(u + \tau(\phi)), \\ \phi_t &= (\tau'(\phi)^2 - q_0) \sin(u + \tau(\phi)) + \cos 2\tau(\phi) \cos(u + \tau(\phi)) \\ &\quad - \frac{3}{4} \cos(u - \tau(\phi)) - \frac{1}{4} \cos(3u + \tau(\phi)) \\ &\quad + \tau'(\phi)u_x + \frac{1}{2} \sin(u + \tau(\phi))u_x^2 + \cos(u + \tau(\phi))u_{xx}, \end{aligned}$$

の解であり、 τ は「振り子の方程式」

$$\tau'' = \cos 2\tau \quad (4)$$

の任意の解である。

(2) は任意の定数関数とその自明解なので、(4) の初等関数解

$$\tau(\phi) = \frac{\pi}{4} \pm \arcsin \left(\frac{\exp(2\sqrt{2}(\phi + A)) - 1}{\exp(2\sqrt{2}(\phi + A)) + 1} \right)$$

を用いて Bäcklund 変換 (3) により定数解 $u = \eta - \pi/4$ を変換すると、進行波解

$$v = n\pi - \frac{\pi}{4} - \eta \mp 2 \arcsin \left(\frac{X^2 - 1}{X^2 + 1} \right)$$

が得られる。ここで X は、例えば

$$X = X_+ = \begin{cases} \frac{\mp(2 \sin \eta + e^Y) + \sqrt{(2 \sin \eta + e^Y)^2 + 4 \cos^2 \eta}}{2 \cos \eta}, & \text{if } \cos \eta > 0, \\ \frac{\mp(2 \sin \eta + e^Y) - \sqrt{(2 \sin \eta + e^Y)^2 + 4 \cos^2 \eta}}{2 \cos \eta}, & \text{if } \cos \eta < 0, \end{cases}$$

$$Y = -\sqrt{2} \cos \eta \left(x + \frac{1 + 2 \sin^2 \eta}{2} t + A \right), \quad A \in \mathbf{R},$$

である。これは、 $x \rightarrow \pm\infty$ でそれぞれ定数に収束する単調な解 (kink 解) である。

また、(4) は楕円関数を用いればその一般解を書き下す事が出来るので、その一般解を用いて (3) によって定数解を変換すると、より複雑な形の kink 解、1-soliton 解、周期解が得られる。この場合、(4) の解は楕円関数を用いているが、得られた (2) の解は初等関数で書かれている。この事実は、方程式 (2) がかなり良い構造をもっている事を示唆している。

参考文献

- [1] Hongyou WU. On Bäcklund Transformations for Nonlinear Partial Differential Equations, J. Math. Anal. and Appl. **192** (1995) p. 151–179.
- [2] H.D.WAHLQUIST & F.B.ESTABROOK. Prolongation structures of nonlinear evolution equations, J. Math. Phys. **16** (1975) p. 1–7.