ON SOME NONLINEAR DISSPATIVE EQUATIONS WITH SUB-CRITICAL NONLINEARITIES

伊藤 直子（東京理科大学理学研究科数学専攻 D1）[1]

j1102701@ed.kagu.tus.ac.jp

本講演では, 以下の非線形消散型方程式の初期値問題 (1) に対する解の存在について考える.

$$\begin{cases} \partial_t u + \alpha \left(-\Delta\right)^{\frac{\rho}{2}} u + \beta \left|u\right|^{\sigma} u + \gamma \left|u\right|^{\varkappa} u = 0, \ x \in \mathbb{R}^n, t > 0, \\ u(0,x) = u_0(x), x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{1}$$

但し, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}\alpha > 0$, $\rho > 0$, $\varkappa > \sigma > 0$. 本講演では, 消散項 $u^{1+\sigma}$ の指数 σ について, sub critical と呼ばれている $0 < \sigma < \frac{\rho}{n}$ の条件の場合を取り上げる. 初期値問題 (1) に対する時間大域解の存在と解の時間減衰評価について, 次のような定理を得ることができた.

定理 1. $\mathrm{Re}\alpha > 0$, $0 < \sigma < \varkappa \le \frac{\rho}{n}$, $u_0 \in \mathbf{L}^\infty \cap \mathbf{L}^{1,a}$, 但し, $a \in (0, \min(1,\rho))$. そのとき, $\mathrm{Re}\beta\delta(\alpha,\rho,\sigma) > 0$, $|\hat{u}_0(0)| = \theta (2\pi)^{-\frac{n}{2}} > 0$. 非線形項の指数 σ は $\frac{\rho}{n}$ に十分近いものとするならば,

$$u(t,x) \in \mathbf{C}\left([0,\infty); \mathbf{L}^\infty \cap \mathbf{L}^{1,a}\right)$$

となる, 次の時間減衰評価を満たす初期値問題 (1) に対する時間大域解が一意に存在する.

$$\left\| u(t) - \theta t^{-\frac{n}{\rho}} G\left(t^{-\frac{1}{\rho}}(\cdot)\right) \chi_\sigma^{-\frac{1}{\sigma}}(t) e^{i\psi(t)} \right\|_{\mathbf{L}^\infty} \le C\varepsilon^{1+\sigma} (1+t)^{-\frac{1}{\sigma}}.$$

また, 関数 $\psi(t)$ は次の評価を満たすものである.

$$\left| \psi(t) - \arg \widehat{u}_0(0) + |\theta|^\sigma \widetilde{\eta} \int_0^t \chi_\sigma^{-\frac{1}{\sigma}}(\tau) (1+\tau)^{-\frac{\sigma}{\rho}n} d\tau \right| \le C\varepsilon^{1+2\sigma} \int_0^t \chi_\sigma^{-\frac{1}{\sigma}}(\tau)(1+\tau)^{-\frac{\sigma}{\rho}n} d\tau.$$

尚, 記号の定義としては, 重み付き Lebesgue 空間 $\mathbf{L}^{1,b}$ を $\mathbf{L}^{1,b} = \left\{\phi \in \mathbf{L}^1; \|\phi\|_{\mathbf{L}^{1,b}} = \left\|\langle x\rangle^b \phi\right\|_{\mathbf{L}^1} < \infty\right\}$. 但し, $b \ge 0$, $\langle x\rangle = \sqrt{1+x^2}$. 関数 ϕ に対するフーリエ変換 $\mathcal{F}\phi$ または $\hat{\phi}$ を $\hat{\phi}(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int e^{-ix\xi}\phi(x)\,dx$, フーリエ逆変換を $\mathcal{F}^{-1}\phi(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int e^{ix\xi}\phi(x)\,dx$ と定義する. また定理で用いられている関数を以下のように定義する.

$$\chi_\sigma(t) = 1 + \frac{\sigma\rho|\theta|^\sigma \eta}{\rho - n\sigma} t^{1-\frac{n\sigma}{\rho}}, \quad \delta(\alpha,\rho,\sigma) = \int |G(x)|^\sigma G(x)\,dx, G(x) = \mathcal{F}^{-1}\left(e^{-\alpha|\xi|^\rho}\right).$$

また, $\eta = \mathrm{Re}\beta\delta(\alpha,\rho,\sigma)$, $\widetilde{\eta} = \mathrm{Im}\beta\delta(\alpha,\rho,\sigma)$.

---

[1] This is a joint work with N.Hayashi, E.I. Kaikina and P.I. Naumkin.