EXISTENCE OF THE GLOBAL ATTRACTOR FOR WEAKLY DAMPED, FORCED KDV EQUATIONS ON SOBOLEV SPACE OF NEGATIVE INDEX

Kotaro Tsugawa

Mathematical Institute, Tohoku University,
Sendai 980-8578, Japan
E-mail: k99d97@math.tohoku.ac.jp

1. Introduction

以下の様な弱いダンピング項と外力項が付いたKdV方程式に対するグローバルアトラクターの存在について考える.

$$\partial_t u + \gamma u + \partial_x^3 u + \frac{1}{2}\partial_x u^2 = f, \tag{1.1}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \in \dot{H}^s(\mathbb{T}) \tag{1.2}$$

ここで, $\mathbb{T}$ は1次元トーラス. u は $\mathbb{T}\times[0,\infty)$ から $\mathbb{R}$ への関数とする. また, $\gamma > 0$ とし, $f \in \dot{L}^2(\mathbb{T})$ は時間に依存しないものとする. ここで, $\dot{L}^2(\mathbb{T}) = \{u \in L^2(\mathbb{T}); \int_{\mathbb{T}} u(x)\,dx = 0\}$, $\dot{H}^s(\mathbb{T}) = \{u \in H^s(\mathbb{T}); \int_{\mathbb{T}} u(x)\,dx = 0\}$ である. グローバルアトラクターの存在について, 十分滑らかな初期値 ($s = 2$) に対しては, 既に多くの研究が有る ([3],[4],[7]). ここではグローバルアトラクターの存在を保障する s の下限について考える. まず, 時間局所解に関する結果を述べる. 通常の KdV 方程式 ($\gamma = 0, f = 0$) に対して Bourgain ([1]) は $s = 0$ で時間局所適切性（解の一意存在と初期値に対する連続依存性）を示した. ここで用いられた手法は Fourier restriction norm method と呼ばれ, この手法を改良する事により $s \geq -1/2$ で時間局所適切である事が示された ([6],[2]). 逆に $s < -1/2$ の場合にはある条件下で適切でない事も示されている. つまり、$s \geq -1/2$ が時間局所解が存在するための optimal な条件である. 時間局所解の存在時間は初期値の大きさのみよって決まり, 通常の KdV 方程式は L^2 保存則が成立するので, $s = 0$ の場合には、時間局所解を繰り返し延長する事が出来て, 自動的に時間大域解になる. これらの方法は(1.1)–(1.2) に対しても適用する事が出来る. そして(1.1) に対して u を掛けて $\mathbb{T}\times[0,t]$ 上で積分する事により,

$$\|u(t)\|_{L^2}^2 < \|u_0\|_{L^2}^2 \exp(-2\gamma t) + \gamma^{-2}\|f\|_{L^2}^2$$

が得られる. よって、初期値に応じて十分大きな t をとる事により, $\|u(t)\|_{L^2} < 2\gamma^{-2}\|f\|_{L^2}$ が得られるので, 吸収集合の存在がわかる. この評価式を利用して, Goubet は, $s = 0$ に対して, グローバルアトラクターの存在を示した ([5]). 一方, KdV 方程式は無限個の保存量を持つが, $s < 0$ においては保存量は存在しない. よって, 時間大域的評価が得られず, $s < 0$ で時間大域解を考えるのは難しいと思われる. しかし, Colliander, Keel, Staffilani, Takaoka and Tao は, $s < 0$ において定義される擬保存量を計算する事により, 通常の KdV 方程式が $s \geq -1/2$ において時間大域的適切である事を示した ([2]). この手法は I-method と呼ばれている. ここで, 次のような問題が考えられる. (1.1)–(1.2) に対しても, この I-method は適用できるか？そして, それを利用してグローバルアトラクターの存在を示す事が出来るか？これに対し以下の結果を得た.

Theorem 1.1. *We assume $s \geq -1/2$. Then, there exist the semigroup $S(t)$ and maps M_1 and M_2 such that $S(t)u_0$ is the unique solution of* (1.1)–(1.2) *and*

$$S(t)u_0 = M_1(t)u_0 + M_2(t)u_0, \tag{1.3}$$

$$\sup_{t>T_1} \|M_1(t)u_0\|_{L^2} < K, \tag{1.4}$$

and for $t > T_1$

$$\|M_2(t)u_0\|_{H^s} < K \exp\left(-\gamma(t-T_1)\right) \tag{1.5}$$

where the constant K *depending only on* $\|f\|_{L^2}$ *and* γ *and* T_1 *depending only on* $\|f\|_{L^2}$, γ *and* $\|u_0\|_{H^s}$.

Corollary 1.2. *Let* $s \geq -1/2$. *Then, equation* (1.1)–(1.2) *possess a global attractor in* H^s, *that is a bounded subset of* L^2.

2. The proof of Theorem 1.1

We define $m : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ be a smooth monotone $\mathbb{R}$-valued function such that

$$m(\xi) = \begin{cases} 1, & |\xi| < N \\ N^{-s}|\xi|^s, & |\xi| > 2N \end{cases}.$$

We define the operator I as following

$$\widehat{If(\xi)} = m(\xi)\widehat{f}(\xi).$$

Here, we summarize the properties of I. For any function f and $s < 0$, we have

$$\|f\|_{H^s} \leq \|If\|_{L^2} \leq N^{-s}\|f\|_{H^s}$$

Let $\widehat{g_1} = \widehat{f}\,\Big|_{|\xi|<2N}$ and $\widehat{g_2} = \widehat{f}\,\Big|_{|\xi|>2N}$. Then, we have

$$\|g_1\|_{L^2} \leq 2^{-s}\|If\|_{L^2}, \qquad \|g_2\|_{H^s} \leq N^s\|If\|_{L^2}.$$

We apply "I-method" to (1.1)–(1.2). Then, we have the following a priori estimate.

Proposition 2.1. *Let* $T > 0$ *be given and* u *be a solution of* (1.1)–(1.2) *on* $t \in [0,T]$. *We assume* $s \geq -1/2$, $N^{3/5} > \gamma$, $N^{1/5} > C_1 T$ *and*

$$\|Iu_0\|_{L^2}^2 + \frac{1}{\gamma^2}\|If\|_{L^2}^2 \exp(2\gamma T) < N^{6/5}C_2, \tag{2.6}$$

then we have

$$\|Iu(T)\|_{L^2}^2 \exp(2\gamma T) < C_3\left(\|Iu_0\|_{L^2}^2 + \frac{1}{\gamma^2}\|Ig\|_{L^2}^2 \exp(2\gamma T)\right). \tag{2.7}$$

We prove Theorem 1.1 by using Proposition 2.1.

Proof of Theorem 1.1. We choose $T_1 > 0$ so that

$$\begin{aligned} \exp(2\gamma T_1) > \|u_0\|_{H^s}^2\|f\|_{L^2}^{-2}\max\Big\{&\gamma^{-10s/3}, (C_1T_1)^{-10s}, \\ &(C_2/2)^{5s/(3+5s)}\|u_0\|_{H^s}^{-10s/(3+5s)}, \left(2\gamma^{-2}C_2^{-1}\|f\|_{L^2}^2\exp(2\gamma T_1)\right)^{-5s/3}\Big\}, \end{aligned} \tag{2.8}$$

which may certainly be done because $s \geq -1/2$ and T_1 depends only on $\|f\|_{L^2}$,γ and $\|u_0\|_{L^2}$. Put

$$\begin{aligned} N = \max\Big\{&\gamma^{5/3}, (C_1T_1)^5, (C_2/2)^{-5/(6+10s)}\|u_0\|_{H^s}^{5/(3+5s)}, \\ &\left(2\gamma^{-2}C_2^{-1}\|f\|_{L^2}^2\exp(2\gamma T_1)\right)^{5/6}\Big\}. \end{aligned}$$

Then, we have

$$N^{3/5} > \gamma, \qquad N^{1/5} > C_1T_1,$$
$$\|Iu_0\|_{L^2}^2 \leq N^{-2s}\|u_0\|_{H^s}^2 = N^{6/5}N^{-(6+10s)/5}\|u_0\|_{H^s}^2 < C_2N^{6/5}/2,$$
$$\gamma^{-2}\|If\|_{L^2}\exp(2\gamma T_1) < C_2N^{6/5}/2.$$

Therefore, from Proposition 2.1 we obtain

$$\|u(T_1)\|_{H^s}^2 \le \|Iu(T_1)\|_{L^2}^2 < C_3\left(N^{-2s}\|u_0\|_{H^s}^2 \exp(-2\gamma T_1) + \gamma^{-2}\|f\|^2\right). \tag{2.9}$$

¿From (2.8), we have

$$N^{-2s}\exp(-2\gamma T_1) < \|u_0\|_{H^s}^{-2}\|f\|_{L^2}^2.$$

Therefore, we obtain

$$\|u(T_1)\|_{H^s}^2 < C_3(1+\gamma^{-2})\|f\|_{L^2}^2 < K_1 \tag{2.10}$$

where K_1 depends only on $\|f\|_{L^2}$ and γ. We next fix $T_2 > 0$ and solve (1.1)–(1.2) on $[T_1, T_1+T_2]$ with initial data $u(T_1)$. Let $K_2 > 0$ be sufficiently large enough to satisfy

$$K_2\exp(2\gamma t) > \max\Big\{\gamma^{-10s/3}, (C_1 t)^{-10s} \\ \left(C_2^{-1}K_1\right)^{-5s/3}, \left(C_2^{-1}\gamma^{-2}\|f\|_{L^2}^2\exp(2\gamma t)\right)^{-5s/3}\Big\} \tag{2.11}$$

for any $t > 0$, which may certainly be done because $s \ge -1/2$ and K_2 depends only on $\|f\|_{L^2}$ and γ. Put $N^{-2s} = K_2\exp(2\gamma T_2)$. Then, from (2.11), the assumptions in Proposition 2.1 are satisfied. Therefore, we obtain

$$\begin{aligned} \|Iu(T_1+T_2)\|_{L^2}^2 &< C_3\left(N^{-2s}\|u(T_1)\|_{H^s}^2\exp(-2\gamma T_2) + \gamma^{-2}\|f\|_{L^2}^2\right) \\ &< C_3\left(K_1K_2 + \gamma^{-2}\|f\|_{L^2}^2\right) < K_3 \end{aligned} \tag{2.12}$$

where K_3 depends only on $\|f\|_{L^2}$ and γ. For $t > T_1$, we define maps $M_1(t)$ and $M_2(t)$ such that

$$\widehat{M_1(t)u_0} = \widehat{S(t)u_0}\,\Big|_{|\xi|<2N}, \quad \widehat{M_2(t)u_0} = \widehat{S(t)u_0}\,\Big|_{|\xi|>2N} \tag{2.13}$$

where $S(t)u_0 = u(t)$ and $N = \left(K_2\exp(2\gamma(t-T_1))\right)^{-1/2s}$. Then, for $t > T_1$, we have

$$\|M_1(t)u_0\|_{L^2}^2 < \|Iu(t)\|_{L^2}^2 < K_3, \tag{2.14}$$

$$\|M_2(t)u_0\|_{H^s}^2 < N^{2s}\|Iu(t)\|_{L^2}^2 < K_2^{-1}K_3\exp(-2\gamma(t-T_1)). \tag{2.15}$$

Let $K = \max\{K_2^{1/2}, K_1^{-1/2}K_2^{1/2}\}$. Then, we have (1.4) and (1.5). $\square$

References

[1] J. Bourgain, *Fourier transform restriction phenomena for certain lattice subsets and applications to nonlinear evolution equations. II. The KdV-equation*, Geom. Funct. Anal. **3** (1993), no. 3, 209–262.

[2] J. Colliander, M. Keel, G. Staffilani, H. Takaoka and T. Tao, *Sharp global well-posedness for KdV and modified KdV on $\mathbb{R}$ and $\mathbb{T}$*, preprint.

[3] J.M. Ghidaglia, *Weakly damped forced Korteweg-de Vries equations behave as a finite-dimensional dynamical system in the long time*, J. Differential Equations **74** (1988), no. 2, 369–390.

[4] J.M. Ghidaglia, *A note on the strong convergence towards attractors of damped forced KdV equations*, J. Differential Equations **110** (1994), no. 2, 356–359.

[5] O. Goubet, *Asymptotic smoothing effect for weakly damped forced Korteweg-de Vries equations*, Discrete Contin. Dynam. Systems **6** (2000), no. 3, 625–644.

[6] C.E. Kenig, G. Ponce, L. Vega, *A bilinear estimate with applications to the KdV equation*, J. Amer. Math. Soc. **9** (1996), no. 2, 573–603.

[7] I. Moise and R. Rosa *On the regularity of the global attractor of a weakly damped, forced Korteweg-de Vries equation*, Adv. Differential Equations **2** (1997), no. 2, 257–296.