Stochastic Approach to Distribution of Pseudo-primes in $\mathrm{SL}(2, \mathbf{Q}_p)$

安田 公美
（九州大学大学院数理学研究院）

2002 年 7 月 27 日

Γ を $G = \mathrm{SL}(2, \mathbf{Q}_p)/\{\pm I\}$ の自明でない不連続群であって，対角行列に共役な元のみからなるものとする．各 $\gamma \in \Gamma$ はある $g_\gamma \in G$ と $|a_\gamma|_p \geq 1$ なる $a_\gamma \in \mathbf{Q}_p$ を用いて $\gamma = g_\gamma^{-1} \begin{pmatrix} a_\gamma & 0 \\ 0 & a_\gamma^{-1} \end{pmatrix} g_\gamma$ と書けるから，$\mathcal{N}(\gamma) = |a_\gamma|_p^2$ とおくことにする．$\gamma, \gamma' \in \Gamma$ に対し，γ がねじれを除いて γ' に Γ - 共役なとき $\gamma \approx \gamma'$ と書くことにし，$\approx$ に関する primitive な元の代表元集合をとり，$\mathcal{P}$ とおく．本講演では，p 進上半平面上の跡公式を通じて，マルコフ過程の生成作用素の解析から "pseudo-prime" $\mathcal{N}(\gamma_0)$ $(\gamma_0 \in \mathcal{P})$ の分布を導く．

奇素数 p を固定する．p 進体 $\mathbf{Q}_p$ における 1 の原始 $p-1$ 乗根の一つを ε とし，$\mathbf{Q}_p$ に ε の 2 乗根 $\sqrt{\varepsilon}$ を添加して得られる 2 次拡大体を K とする．$\mathbf{Q}_p$ の元であって，K の 0 でない元 $w = u + \sqrt{\varepsilon}v$ とその共役元 $\overline{w} = u - \sqrt{\varepsilon}v$ の積に書き表されるもの全体を $\mathbf{Q}_p^+$ とおき，p 進上半平面 $\mathbf{H}_p(\subset K)$ を次で定義する：$\mathbf{H}_p^+ := \{z = x + \sqrt{\varepsilon}y : y \in \mathbf{Q}_p^+\}$．上半平面 $\mathbf{H}_p^+$ には，群 G の作用 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$: $z \mapsto \frac{az+c}{bz+d}$ に関する不変距離 d と 不変測度 μ が入り，$\psi(r) = \mathrm{e}^r + \mathrm{e}^{-r} - 2$ とするとき，$\mathrm{Range}(d) = \psi^{-1}\left(p^{2\mathbf{Z}}\right) \cup \{0\}$．

以下，$\Gamma \backslash \mathbf{H}_p^+$ はコンパクトと仮定し，Γ に対する基本領域を $\mathcal{F} \subset \mathbf{H}_p^+$ とする．$l \leq 0$ に対し，$\mathcal{F}$ と交わる半径 $\psi^{-1}\left(p^{2l}\right)$ の球を $B_i^{(l)}$ $(i = 1, \ldots, d_l)$ とする．

$\mathrm{Range}(d)$ 上定義され，0 で連続で，次の条件をみたす非負な関数 f が与

えられたとする：

$$\sum_{n\le -1} p^{2n} f\left(\psi^{-1}\left(p^{2n}\right)\right)^2 < +\infty,$$

$$\sum_{n\ge 0} \tau(i,j,n) f\left(\psi^{-1}\left(p^{2n}\right)\right) < +\infty, \qquad 1 \le i,j \le d_{-1},$$

ただし，$\tau(i,j,n) := \sharp\left\{\gamma\in\Gamma : d\left(B_i^{(-1)}, \gamma B_j^{(-1)}\right) = \psi^{-1}\left(p^{2n}\right)\right\}$．このとき，$p(z,w) = f(d(z,w))$ $(z,w\in \mathbf{H}_p^+)$，$\tilde{p}(z,w) = \sum_{\gamma\in\Gamma} p(z,\gamma w)$ $(z,w\in \mathcal{F})$ とおけば，$\tilde{p}$ は $\mathcal{F}\times\mathcal{F}$ 上一様収束し，２乗可積分となる．Hilbert-Schmidt 型積分作用素

$$T\xi(\cdot) = \int_{\mathcal{F}} \xi(\cdot)\tilde{p}(\cdot,w)\mu(dw), \qquad \xi\in L^2(\mathcal{F})$$

が正定値であるとき，その固有値 $\{\lambda_n\}$ に対し，次の跡公式が成立する．

<u>Theorem</u>

$$\begin{aligned}
&\sum_n \lambda_n \\
&= f(0)\mu(\mathcal{F}) \\
&\quad + \frac{2}{p-1}\left\{ f\left(\psi^{-1}(1)\right) + \left(1-p^{-1}\right)\sum_{r=1}^{\infty} p^r f\left(\psi^{-1}\left(p^{2r}\right)\right)\right\} \sum_{\substack{\{\gamma\}\\ \text{torsion}}} j_\gamma l_\gamma \\
&\quad + \sum_{\gamma_0\in\mathcal{P}}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\log_p \mathcal{N}(\gamma_0)}{2} \left\{ f\left(\psi^{-1}\left(\mathcal{N}(\gamma_0)^m\right)\right) \right. \\
&\qquad\qquad\qquad \left. + \left(1-p^{-1}\right)\sum_{r=1}^{\infty} p^r f\left(\psi^{-1}\left(\mathcal{N}(\gamma_0)^m p^{2r}\right)\right) \right\}.
\end{aligned}$$

ただし，j_γ, l_γ は γ から定まる自然数で，γ の中心化群を Γ_γ とすれば，

$$\Gamma_\gamma = \left\{ g_\gamma^{-1} \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon^{-1} \end{pmatrix}^{kl_\gamma} \begin{pmatrix} b_\gamma & 0 \\ 0 & b_\gamma^{-1} \end{pmatrix}^{n} g_\gamma : k,n\in\mathbf{Z} \right\},$$

$\exists b_\gamma \in \mathbf{Q}_p$ with $|b_\gamma|_p = p^{j_\gamma}$.

$\mathbf{Z}$ 上で定義された非負な関数 u であって，

$$\sum_{n=0}^{\infty} u(n) < +\infty,$$

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} p^{-2n} \exp\left(-t\left(u(n) + \left(1-p^{-2}\right)\sum_{m=n+1}^{\infty} u(m)\right)\right) < +\infty,$$

をみたすものが与えられるごとに，上半平面上のマルコフ過程 X_t であって，遷移関数 P_t が μ に関して絶対連続，かつ，遷移密度関数 p_t が 2 点間の距離のみに依存するものが定まる．そこで，$p_t(z,w)=f_t(d(z,w))$ $(z,w\in\mathbf{H}_p^+)$ とし，$f=f_t$ に対して上の跡公式を応用することを考える．マルコフ過程 X_t に対応する半群 T_t の生成作用素 $-A$ の固有値を求める一方，遷移密度関数を与える f_t に関しては，$u(n)=0$ $(\forall n\geq 1)$ の場合には具体的に与えられ，$u(n)=0$ $(\forall n\geq 2)$ の場合には，そのラプラス変換を求めることが出来る．
$u(n)=0$ $(\forall n\geq 1), u(0)\neq 0$ の場合に跡公式を適用し，時間変数 $t\to+\infty$ のときの極限を見ることにより，torsion γ に対する式

$$d_0=\mu(\mathcal{F})+2(p-1)^{-1}\sum_{\substack{\{\gamma\}\\ \text{torsion}}} j_\gamma l_\gamma$$

を得る．
一方，$u(n)=0$ $(\forall n\geq 2)$ の場合に，跡公式の両辺のラプラス変換を比較し，上の torsion に関する式を代入することにより，$\left\{\sum_{n|m} n\nu\left(p^{2n}\right)\right\}_{m\geq 1}$ （ただし，$\nu\left(p^{2n}\right):=\sharp\left\{\gamma_0\in\mathcal{P}:\mathcal{N}(\gamma_0)=p^{2n}\right\}$） の母関数の表示

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n|m} n\nu\left(p^{2n}\right)s^m=\sum_{k=1}^{d_0}\frac{\left(p^{-1}-s\right)\left(p^{-1}+s\right)}{s^2+\left(p^{-1}\left(1-p^{-1}\right)-\delta_k\right)s+p^{-2}}+\frac{p^{-1}d_{-1}s}{1-s}-d_0$$

を得る．ただし，ここで δ_k $(1\leq k\leq d_0)$ は Γ のみから定まる $d_0\times d_0$ 行列 $Q^{(1)}=\left(q_{ij}^{(1)}\right)_{1\leq i,j\leq d_0}$ $\left(q_{ij}^{(1)}:=\frac{p^{-4}}{1-p^{-1}}\sharp\left\{1\leq k\leq d_{-1}:B_k^{(-1)}\subset B_j^{(0)}\right\}\times\sharp\left\{\gamma\in\Gamma:d\left(B_i^{(0)},\gamma B_j^{(0)}\right)=\psi^{-1}\left(p^2\right)\right\}\right)$ の固有値である．上式の右辺を $G(s)$ とおけば，Möbius' inversion formula を経て次を得る：

<u>Theorem</u>

$$\nu\left(p^{2n}\right)=\frac{1}{2n\pi\sqrt{-1}}\sum_{d|n}\mathfrak{m}\left(\frac{n}{d}\right)\int_C\frac{G(s)}{s^{d+1}}ds,\qquad n\geq 1.$$

ただし，$\mathfrak{m}$ は Möbius の関数，C は複素平面における原点を中心とする十分小さな円周を表す．