複素 Ginzburg-Landau 方程式の解の一意性

横田 智巳* (東京理科大学理学部数学科)

本研究は小川卓克氏 (九州大) との共同研究である.

この講演では次の複素 Ginzburg-Landau 方程式の初期値境界値問題の弱解の一意性について議論する.

$$(1)\quad \begin{cases} \partial_t u - (\lambda + i\alpha)\Delta u + (\sigma + i\beta)|u|^{p-1}u - \gamma u = 0, & t > 0, \quad x \in \Omega, \\ u(t,x) = 0, & t > 0, \quad x \in \partial\Omega, \\ u(0,x) = u_0(x), & t = 0, \quad x \in \Omega. \end{cases}$$

ここで Ω は $\mathbb{R}^2$ の領域とし $p > 1$, $\lambda \geq 0$ かつ σ, α, β γ は実定数とする. 通常 λ は真に正となることを仮定することが多いが (cf. Temam [5]), ここでは (1) を $\lambda = 0$ を含む場合で考える. 全空間 $\Omega = \mathbb{R}^n$ の場合には Ginibre-Velo [1], [2] が $\lambda > 0$ に対する (1) の時間大域的適切性を $\sigma > 0$ の場合に示していて, この場合 $p < \infty$ $(n = 1, 2)$ あるいは $p \leq (n+2)/(n-2)$ $(n \geq 3)$ で係数にはほとんど制限が加えられていない. 彼らはまた条件

$$(2)\qquad |\beta| \leq \frac{2\sqrt{p}}{p-1}\sigma$$

の下でも弱解の一意性を証明している. 同様の結果は $\mathbb{R}^n$ における一般領域 Ω 上での初期値境界値問題 (1) に対しても成立する (Okazawa-Yokota [3]). しかしながら (2) の制限なしでは一般領域上での (1) に対する一意性の結果は知られていないようである. ここでは $n = 2$, $p \leq 3$ の制限の下, (2) の条件を課さずに一意性を示す. 物理的には $n = 2$, $p = 3$ の場合が具体的な model に対応していることに注意する.

初期値 $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ に対して u が (1) の弱解であるとは $u \in C([0,T); H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0,T); H^{-1}(\Omega))$ なる u が 超函数の意味で (1) を満たすことである. $p \leq 3$ のとき (1) の弱解の存在は standard な方法で示される. 一意性に関して以下の定理を得ることができた.

*E-mail: yokota@rs.kagu.tus.ac.jp

Theorem 1. $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ を (必ずしも有界でない) 領域とし $\lambda \geq 0$ かつ $1 < p \leq 3$ とする.

(i-a) $\sigma \geq 0$ かつ $\alpha\beta \geq 0$ $(\alpha \neq 0)$ のとき, $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ に対して (1) の時間大域的弱解 $u \in C([0,\infty); H_0^1(\Omega))$ は一意である.

(i-b) $\sigma \geq 0$ かつ $\alpha\beta < 0$ のとき, $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ に対してある $T^* > 0$ があって (1) の時間局所的弱解 $u \in C([0,T^*); H_0^1(\Omega))$ が存在するがそれは一意である. (もし "$\lambda > 0$" あるいは "$p = 3$ で $\|u_0\|_2$ が十分小さい" ならば, $T^* = \infty$ と取れる)

(ii) $\sigma < 0$ のとき ($p = 3$ のときは $\|u_0\|_2$ が十分小さいとする), (1) の時間局所的弱解 $u \in C([0,T^*); H_0^1(\Omega))$ は一意である.

証明では非線形 Schrödinger 方程式に対する [4] の方法を用いる.

References

[1] Ginibre, J., Velo, G., *The Cauchy problem in local spaces for the complex Ginzburg-Landau equation I, Compactness methods,* Physica D **95** (1996), 191-228.

[2] Ginibre, J., Velo, G., *The Cauchy problem in local spaces for the complex Ginzburg-Landau equation II, Contraction methods,* Comm. Math. Phys., **187** (1997), 45-79.

[3] Okazawa, N., Yokota, T., *Global existence and smoothing effect for the complex Ginzburg-Landau equation with p-Laplacian* J. Differential Equations (2002) **182**, 541-576.

[4] Ogawa, T., *A proof of Trudinger's inequality and its application to nonlinear Schrödinger equations,* Nonlinear Anal. T.M.A., **14** (1990), 765-769.

[5] Temam, R., *Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics,* Applied Math. Sci., vol. 68, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1988; 2nd ed., 1997.