

Stability of standing waves for the nonlinear Schrödinger equation with critical power nonlinearity and harmonic potential

福泉 麗佳 (Reika FUKUIZUMI) 東北大・理
Email : k99m69@math.tohoku.ac.jp

調和ポテンシャル $V(x) = |x|^2$ を伴う非線形シュレディンガー方程式

$$i\partial_t u = -\Delta u + V(x)u - |u|^{p-1}u, \quad (t, x) \in \mathbb{R}^{1+n} \quad (\text{NLS})$$

の standing wave 解 $u_\omega(t, x) = e^{i\omega t} \phi_\omega(x)$ の安定性について考える. この講演では常に $1 < p < 2^* - 1$ を仮定する. ここで, $2^* = \infty$ if $n = 1, 2$, $2^* = 2n/(n-2)$ if $n \geq 3$ とおいた. また $\omega \in \mathbb{R}$ とし $\phi_\omega(x)$ は

$$-\Delta \phi + V(x)\phi + \omega \phi - |\phi|^{p-1}\phi = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (\text{SP})$$

の基底状態解とする. $-\Delta + V(x)$ の第1固有値を λ_1 とすると, $\omega > -\lambda_1$ に対して Σ に属する正值球対称解 $\phi_\omega(x)$ が一意的に存在し, それは基底状態解になっていることを注意しておく. ([7] 及びその References を参照). ここで,

$$\Sigma := \{v \in H^1(\mathbb{R}^n) : |x|^2 |v(x)|^2 \in L^1(\mathbb{R}^n)\}$$

である.

[9] における数値計算結果及びその他の形式的な考察から, 次が予想される.

(予想1) $p < 1 + 4/n$ のとき, すべての $\omega > -\lambda_1$ に対して (NLS) の standing wave 解 $e^{i\omega t} \phi_\omega(x)$ は安定である.

(予想2) $p = 1 + 4/n$ のとき, すべての $\omega > -\lambda_1$ に対して (NLS) の standing wave 解 $e^{i\omega t} \phi_\omega(x)$ は安定である.

(予想3) $p > 1 + 4/n$ のとき, 振動数の臨界値 ω_c が存在して, $\omega_c > \omega > -\lambda_1$ に対して (NLS) の standing wave 解 $e^{i\omega t} \phi_\omega(x)$ は安定であり, $\omega > \omega_c$ に対して不安定である.

(予想1), (予想2), (予想3) における $-\lambda_1$ に十分近い $\omega > -\lambda_1$ についての安定性と, (予想1) における ω が十分大きいときの安定性が [5] で, また, (予想3) における ω が十分大きいときの不安定性が [4] で 証明されている. この講演では, 未解決である (予想2) で ω が十分大きい場合に関して, それがほぼ正しいことを紹介したい. 結果を正確に述べる前に $V(x) \equiv 0$ のときの結果と比較する. この場合, 任意の $\omega > 0$ に対して

$$-\Delta \psi + \omega \psi - |\psi|^{p-1}\psi = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (\text{SP0})$$

の $H^1(\mathbb{R}^n)$ に属する正值球対称解 $\psi_\omega(x)$ が一意的に存在し, (NLS) with $V(x) \equiv 0$ の standing wave 解 $e^{i\omega t}\psi_\omega(x)$ は $p < 1+4/n$ のとき任意の $\omega > 0$ に対して安定で, $p \geq 1+4/n$ のとき任意の $\omega > 0$ に対して不安定である (例えば [2, 6] 及び それらの References を参照).

$V(x) \equiv 0$ でない場合, $p \geq 1+4/n$ であっても, 安定な standing wave 解が存在することに注意する (予想 1 [5, 9] 参照).

以下では次の記号を用いる.

$$\begin{aligned} E(v) &:= \frac{1}{2}\|\nabla v\|_2^2 + \frac{1}{2}\|xv\|_2^2 - \frac{1}{p+1}\|v\|_{p+1}^{p+1}, \\ E_0(v) &:= \frac{1}{2}\|\nabla v\|_2^2 - \frac{1}{p+1}\|v\|_{p+1}^{p+1}, \\ S_\omega(v) &:= E(v) + \frac{\omega}{2}\|v\|_2^2. \end{aligned}$$

次のように, (NLS) に対する初期値問題は Σ において時間局所的に適切であり, 解が存在する限り, エネルギーと粒子数の保存則が成り立つことが知られている ([2] の 9.2 節参照).

Proposition 1. For any $u_0 \in \Sigma$, there exist $T = T(\|u_0\|_\Sigma) > 0$ and a unique solution $u(t) \in C([0, T], \Sigma)$ of (NLS) with $u(0) = u_0$ satisfying

$$E(u(t)) = E(u_0), \quad \|u(t)\|_{L^2}^2 = \|u_0\|_{L^2}^2, \quad t \in [0, T].$$

また, ここで考察する安定性とは次の意味での安定性である.

Definition 1. We say that a standing wave solution $e^{i\omega t}\phi_\omega(x)$ of (NLS) is stable in Σ if for any $\varepsilon > 0$ there exists $\delta > 0$ with the following property: If $u_0 \in \Sigma$ satisfies $\inf\{\|u_0 - e^{i\theta}\phi_\omega\|_\Sigma : \theta \in \mathbb{R}\} < \delta$, then the solution $u(t)$ of (NLS) with $u(0) = u_0$ exists for all $t \geq 0$ and satisfies

$$\sup_{t \geq 0} \inf\{\|u(t) - e^{i\theta}\phi_\omega\|_\Sigma : \theta \in \mathbb{R}\} < \varepsilon.$$

今回, 以下の定理を得た.

Theorem 1. Assume that $p = 1+4/n$ and $n \geq 2$. Then there exists $\omega_* = \omega_*(n) > 0$ such that the standing wave solution $e^{i\omega t}\phi_\omega(x)$ of (NLS) is stable in Σ_{rad} for any $\omega \in (\omega_*, \infty)$.

[6] による一般論では, $e^{i\omega t}\phi_\omega(x)$ の安定性・不安定性に関する十分条件は ω の関数 $d(\omega) = S_\omega(\phi_\omega)$ を用いて与えられる. すなわち, $d''(\omega_1) > 0$ であれば $e^{i\omega_1 t}\phi_{\omega_1}(x)$ は安定であり, 逆に, $d''(\omega_1) < 0$ であれば, $e^{i\omega_1 t}\phi_{\omega_1}(x)$ は不安定である.

$V(x) \equiv 0$ の場合はスケール則 $\psi_\omega(x) = \omega^{1/(p-1)}\psi_1(\sqrt{\omega}x)$ が成り立つので, $d(\omega) = \omega^{2/(p-1)-n/2+1}d(1)$ が成り立つ. これから, $\omega > 0$ に依らず, $p = 1+4/n$ が臨界冪になるこ

とが分かる. これに対して, $V(x) \equiv 0$ でない場合は, このようなスケール不変性は存在しないので, 実際にどのように $d''(\omega)$ を計算すればよいか, という問題が生じる.

また $p = 1 + 4/n$ のとき, $V(x) \equiv 0$ の場合は, 基底状態解 $\psi_\omega(x)$ は $E_0(\psi_\omega) = 0$ を満たすため, virial identity

$$\frac{d^2}{dt^2} \|xu(t)\|_2^2 = 16E_0(u(t)), \quad t \in [0, T] \quad (1)$$

を用いれば, 爆発の意味での強い不安定性がいえる. ([2] 8.2 節参照). $V(x) \equiv 0$ でない場合は (1) の右辺 ($= 2E(u) - 2\|xu\|_2^2$) の汎関数の作る超曲面上に (SP) の基底状態解 $\phi_\omega(x)$ が存在するかどうかは簡単にはわからず, 上のような議論には持ち込めない. そのため, 今までにいくつかの試みがなされているが, ω が十分 $-\lambda_1$ に近いところ以外は解決されていない. ([11], [12] 参照).

始めに述べた [9] の数値計算結果からの (予想 2) によれば, $V(x) \equiv 0$ でない場合は, $p = 1 + 4/n$ のとき standing wave 解 $e^{i\omega t}\phi_\omega(x)$ は安定であると思われるため, [6] における安定性の十分条件 $d''(\omega) > 0$ を ω が十分大きいときに示すことを考える. $\phi_\omega(x)$ の変分法的特徴づけを用いると,

$$d(\omega) = S_\omega(\phi_\omega) = \frac{p-1}{2(p+1)} \|\phi_\omega\|_{p+1}^{p+1} \quad (2)$$

となる. ここで, (SP) の基底状態解 $\phi_\omega(x)$ をリスケールした関数 $\tilde{\phi}_\omega(x)$:

$$\phi_\omega(x) = \omega^{1/(p-1)} \tilde{\phi}_\omega(\sqrt{\omega}x), \quad \omega > 0$$

を考え,

$$(2) = \frac{p-1}{2(p+1)} \omega \|\tilde{\phi}_\omega\|_{p+1}^{p+1}$$

と変形し, 以下の $\tilde{\phi}_\omega(x)$ の性質を用いる.

Proposition 2. Let $1 < p < 2^* - 1$, $n \geq 2$ and $\psi_1(x)$ be the unique positive radial solution of (SP0) with $\omega = 1$. Then the followings hold.

(i) There exist $C_0(n) > 0$ and $r_0(n, p) > 0$ such that

$$|\tilde{\phi}_\omega(r)| \leq C_0 r^{-(n-1)/2} e^{-r/2}$$

for any $r \geq r_0$ and $\omega > 0$.

(ii) Define the linearized operator $\tilde{L}_\omega$ on $\{v \in H^2(\mathbb{R}^n) : |x|^2 v \in L^2(\mathbb{R}^n)\}$ by

$$\tilde{L}_\omega := -\Delta + 1 + \frac{|x|^2}{\omega^2} - p\tilde{\phi}_\omega^{p-1}(x).$$

Let $\omega > 0$. Then $\tilde{L}_\omega$ is invertible and $\tilde{L}_\omega^{-1} : L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ is bounded.

(iii) $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \|\tilde{\phi}_\omega - \psi_1\|_{H_{\text{rad}}^1} = 0$.

(i) は [1], (ii) は [8], (iii) は [4] において証明されている. また, $\tilde{\phi}_\omega(x)$ の満たす方程式を ω で微分などすることにより次の補題が得られる.

Lemma 1. Let $1 < p < 2^* - 1$. Then we have

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & \tilde{L}_\omega \left(\frac{\partial \tilde{\phi}_\omega}{\partial \omega} \right) = 2\omega^{-3} |x|^2 \tilde{\phi}_\omega, \\ \text{(ii)} \quad & \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{\phi}_\omega^p(x) \frac{\partial \tilde{\phi}_\omega}{\partial \omega}(x) dx = -\frac{2\omega^{-3}}{p-1} \int_{\mathbb{R}^n} |x|^2 \tilde{\phi}_\omega^2(x) dx. \end{aligned}$$

$\tilde{\phi}_\omega$ の ω に関する微分可能性は [7] と [10] により従う. Proposition 2 と Lemma 1 を使って, $p = 1 + 4/n$ で ω が十分大きいときに $d''(\omega) > 0$ となることを示していく. 最後に, このような着想によって, 非一様媒質でのシュレディンガー方程式の standing wave 解の安定性が [3] において議論されていることを述べておく.

References

- [1] H. Berestycki and P. L. Lions, Nonlinear scalar field equations, I-Existence of a ground state, Arch. Rat. Mech. Anal. **82** (1983) 313–346.
- [2] T. Cazenave, "An introduction to nonlinear Schrödinger equations," Textos de Métodos Matemáticos 26, IM-UFRJ, Rio de Janeiro 1993.
- [3] G. Fibich and X.P. Wang, Stability of solitary waves for nonlinear Schrödinger equations with inhomogeneous nonlinearities, Physica D. **175** (2003) 96–108.
- [4] R. Fukuizumi and M. Ohta, Instability of standing waves for nonlinear Schrödinger equations with potentials, Differential and Integral Eqs. **16** (2003) 691–706.
- [5] R. Fukuizumi and M. Ohta, Stability of standing waves for nonlinear Schrödinger equations with potentials, Differential and Integral Eqs. **16** (2003) 111–128.
- [6] M. Grillakis, J. Shatah and W. Strauss, Stability theory of solitary waves in the presence of symmetry I, J. Funct. Anal. **74** (1987) 160–197.
- [7] M. Hirose and M. Ohta, Structure of positive radial solutions to scalar field equations with harmonic potential, J. Differential Eqs. **178** (2002) 519–540.
- [8] Y. Kabeya and K. Tanaka, Uniqueness of positive radial solutions of semilinear elliptic equations in $\mathbb{R}^n$ and Séré's non-degeneracy condition, Commun. P. D. E. **24** (1999) 563–598.
- [9] H. A. Rose and M. I. Weinstein, On the bound states of the nonlinear Schrödinger equation with a linear potential, Physica D **30** (1988) 207–218.

- [10] J. Shatah and W. Strauss, Instability of nonlinear bound states, *Comm. Math. Phys.* **100** (1985) 173–190.
- [11] J. Zhang, Sharp criteria for blowup and global existence in nonlinear Schrödinger equations under a harmonic potential (1999) Preprint.
- [12] J. Zhang, Stability of attractive Bose-Einstein condensates, *Journal of statistical Physics.* **101** (2000) 731–745.