Large time behavior of solutions to 2-dimensional damped wave equations

細野　敬史　九州大学大学院数理学府

小川　卓克　九州大学大学院数理学研究院

空間 2 次元で次の消散項を持つ波動方程式である半線形 Damped Wave Equations に関する初期値問題

$$(NLDW)\begin{cases}\partial_t^2 u - \Delta u + \partial_t u = |u|^\alpha u, & (t,x) \in (0,\infty)\times\mathbb{R}^2,\\ u(0,x) = u_0(x), & x\in\mathbb{R}^2,\\ \partial_t u(0,x) = u_1(x), & x\in\mathbb{R}^2\end{cases}$$

の可解性や解の性質について考える。ここで $u = u(t,x) : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$、非線形項の α は $\alpha > 0$ である。まず (NLDW) の線形化問題

$$(LDW)\begin{cases}\partial_t^2 u - \Delta u + \partial_t u = 0, & (t,x) \in (0,\infty)\times\mathbb{R}^2,\\ u(0,x) = u_0(x), & x\in\mathbb{R}^2,\\ \partial_t u(0,x) = u_1(x), & x\in\mathbb{R}^2\end{cases}$$

の散逸構造性を示す定理について述べた後、$\alpha > \frac{2}{n} = 1$ の仮定の下で従来よりも広い関数空間に属する初期値に対しての (NLDW) の時間大域的可解性の結果に触れ、これと線形評価から半線形問題 (NLDW) の解の漸近挙動について得られた結果を報告する。

記号、関数空間について

関数 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ に対して、f の Fourier 変換 $\mathcal{F}[f]$ を次で定義する。

$$\mathcal{F}[f](\xi) := \hat{f}(\xi) := (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi} f(x)dx.$$

関数列 $\{\hat{\phi}_j(\xi)\}_{j=-\infty}^{\infty} \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^n_\xi)$ で以下の性質を満たすものを Littlewood -Paley の 2 進単位分解と呼ぶ。

$$\begin{cases}\hat{\psi}(\xi),\ \hat{\phi}(\xi) \geq 0\ :\ \text{球対称},\\ \hat{\phi}(\xi) = 0, \quad \xi \in B_2^c \cup B_{\frac{1}{2}}, \quad \hat{\psi}(\xi) = 0, \quad \xi\in B_2,\\ \hat{\phi}_j(\xi) = \hat{\phi}(\frac{\xi}{2^j}), \quad \displaystyle\sum_{j=-\infty}^{\infty} \hat{\phi}_j(\xi) = 1, \quad \text{ただし } \hat{\phi}_0 := \hat{\psi}.\end{cases}$$

$s \geq 0$, $1 \leq p, \sigma \leq \infty$ に対して、Besov 空間 $B^s_{p,\sigma}$ を次で定義する。

$$B^s_{p,\sigma}(\mathbb{R}^n) := \Big\{ u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : \|u\|_{B^s_{p,\sigma igma}} := \Big(\sum_{j\geq 1} 2^{\sigma j s} \|\phi_j * u\|^\sigma_{L^p} \Big)^{\frac{1}{\sigma}} < \infty \Big\}.$$

Main Results

まず線形問題 (LDW) についての結果が Theorem 1 である。

Theorem 1. **(線形評価)** $n=2$, $1 \leq q \leq p \leq \infty$ とする。$u_0 \in L^q(\mathbb{R}^2)$, $u_1 \in L^q(\mathbb{R}^2)$ とし、$u(t,x)$ を線形の Damped Wave Equations に関する初期値問題 (LDW) の解とする。また $v(t,x)$, $w(t,x)$, $\tilde{w}(t,x)$ をそれぞれ次の初期値問題 (LH) , (LW1) , (LW2) の解とする。

$$(LH) \begin{cases} \partial_t v - \Delta v = 0, & (t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^2, \\ v(0,x) = u_0(x) + u_1(x), & x \in \mathbb{R}^2, \end{cases}$$

$$(LW1) \begin{cases} \partial_t^2 w - \Delta w = 0, & (t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^2, \\ w(0,x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^2, \\ \partial_t w(0,x) = u_1(x), & x \in \mathbb{R}^2, \end{cases}$$

$$(LW2) \begin{cases} \partial_t^2 \tilde{w} - \Delta \tilde{w} = 0, & (t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^2, \\ \tilde{w}(0,x) = 0, & x \in \mathbb{R}^2, \\ \partial_t \tilde{w}(0,x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^2. \end{cases}$$

このとき $\gamma = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$ として次の評価式が成り立つ。

$$\begin{aligned} &\left\| u(t) - v(t) - e^{-\frac{t}{2}} \left\{ w(t) + \left(\frac{1}{2} + \frac{t}{8} \right) \tilde{w}(t) \right\} \right\|_{L^p} \\ &\leq \begin{cases} C t^{-\gamma-1} (\|u_0\|_{L^q} + \|u_1\|_{L^q}), & t \geq 1, \\ C t^{-\gamma} (\|u_0\|_{L^q} + \|u_1\|_{L^q}), & 0 < t < 1. \end{cases} \end{aligned}$$

次に半線形の問題 (NLDW) について、時間大域的可解性の結果を Theorem 2 に述べる。

Theorem 2. **(時間大域的可解性)** $n=2$, $2 \leq p \leq \infty$ とする。また $u_0 \in B^1_{2,1}(\mathbb{R}^2) \cap L^1(\mathbb{R}^2)$, $u_1 \in B^0_{2,1}(\mathbb{R}^2) \cap L^1(\mathbb{R}^2)$ とし、$\alpha > 1$ とする。もし $\|u_0, u_1\|_X := \|u_0\|_{B^1_{2,1}} + \|u_0\|_{L^1} + \|u_1\|_{B^0_{2,1}} + \|u_1\|_{L^1}$ が十分小さければ、Damped Wave equations に関する半線形の初期値問題 (NLDW) の解 $u(t,x) \in C([0,\infty); L^2 \cap L^\infty)$ が唯一つ存在して、 $u(t,x)$ は次を満たす。

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^p} \leq C(1+t)^{-(1-\frac{1}{p})} \|u_0, u_1\|_X.$$

さらに $u(t,x)$ は

$$u(t) \in C([0,\infty); H^1) \cap C^1([0,\infty); L^2)$$

$$\|\nabla u(t)\|_{L^2} \leq C(1+t)^{-1} \|u_0, u_1\|_X.$$

を満たす。

さらに線形評価と大域解の減衰評価から次の評価が得られる。

Theorem 3. **(非線形評価)** $n=2$, $1 \le p \le \infty$, $u_0 \in B^1_{2,1}(\mathbb{R}^2) \cap L^1(\mathbb{R}^2)$, $u_1 \in B^0_{2,1}(\mathbb{R}^2) \cap L^1(\mathbb{R}^2)$ とし、$\alpha > 1$ とする。$u(t,x)$ は Damped Wave equations に関する半線形の初期値問題 (NLDW) の解、$\bar{v}(t,x)$ を次の (NLH) の解とし、$w(t,x), \tilde{w}(t,x)$ はそれぞれ初期値問題 (LW1) , (LW2) の解とする。

$$(NLH) \begin{cases} \partial_t \bar{v} - \Delta \bar{v} = |u|^\alpha u, & (t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^2, \\ \bar{v}(0,x) = u_0(x) + u_1(x), & x \in \mathbb{R}^2. \end{cases}$$

このとき $\|u_0, u_1\|_X := \|u_0\|_{B^1_{2,1}} + \|u_0\|_{L^1} + \|u_1\|_{B^0_{2,1}} + \|u_1\|_{L^1}$ が十分小さければ、$\epsilon = \min\{1, \alpha - (1-\frac{1}{p})\} > 0$ として以下の評価式が成り立つ。

$$\begin{aligned} &\left\| u(t) - \bar{v}(t) - e^{-\frac{t}{2}} \left\{ w(t) + \left(\frac{1}{2} + \frac{t}{8} \right) \tilde{w}(t) \right\} \right\|_{L^p} \\ &\qquad \le C t^{-(1-\frac{1}{p})-\epsilon} \|u_0, u_1\|_X, \qquad t \ge 1. \end{aligned}$$

$\bar{v}$ の挙動を見ることにより、自己相似解への漸近を示す次の評価がただちに従う。

Corollary. Theorem 3. の仮定の元で以下の評価が成り立つ。

$$\left\| u(t) - MG_t - e^{-\frac{t}{2}} \left\{ w(t) + \left(\frac{1}{2} + \frac{t}{8} \right) \tilde{w}(t) \right\} \right\|_{L^p} = o\left(t^{-(1-\frac{1}{p})-\epsilon} \right), \qquad t \to \infty.$$

ここで G_t は熱核 $G_t(x) = \frac{1}{4\pi t} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$ で

$$M := \int_{\mathbb{R}^2} (u_0(x) + u_1(x)) dx + \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^2} |u(s)|^\alpha u(s) dx ds,$$

ただし $M \ne 0$.

参考文献

[1] H. Fujita, *On the blowing up of solutions of the Cauchy problem for* $u_t - \Delta u = u^{1+\alpha}$, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. 1, **13** (1966), 109-124.

クト, 92-93,

[2] S. Kawashima, M. Nakao, K. Ono, *On the decay property of solutions to the Cauchy problem of the semilinear wave equation with a dissipative term* , J. Math. Soc. Japan. **47** (1995), 617-653.

[3] P. Marcati, K. Nishihara, *The* L^p-L^q *estimates of solutions to one-dimensional damped wave equations and their application to the compressible flow through porous media*, J. Diff. Equations **191** (2003), 445-469.

[4] B. Marshall, W. Strauss, S. Wainger, $L^p - L^q$ *estimates for the Klein-Gordon equations*, J. Math. Pures Appl. **59** (1980), 417-440.

[5] A. Matsumura, *On the asymptotic behavior of solution of semi-linear wave equation* , Publ. Res. Inst. Math. Sci. **12** (1976), 169-189.

[6] M. Nakao, K. Ono, *Existence of global solutions to the Cauchy problem for the semilinear dissipative wave equations* , Math. Z. **214** (1993), 325-342.

[7] T. Narazaki, $L^p - L^q$ *estimates for damped wave equation and their applications to semi-linear problem*, preprint, Tokai univ.

[8] K. Nishihara, *Asymptotic Behavior of Solutions of Quasilinear Hyperbolic Equations with Linear Damping*, J. Differential Equations **137** (1997), 384-395.

[9] K. Nishihara, L^p-L^q *estimates of solutions to the damped wave equation in 3-dimensional space and their application*, Math. Z. **244** (2003), 631-649.

[10] K. Ono, *Global Existence and Asymptotic Behavior of Small Solutions for Semilinear Dissipative Wave Equations*, Discrete Contin. Dynam. Systems **9** (2003), 651-662.