On the Feynman path integral of the functional

一ノ瀬　弥，　信州大学理学部

2003/6/28

古典力学における Hamilton 関数は

$$\mathcal{H}(t,x,p) = \frac{1}{2m}|p - A(t,x)|^2 + V(t,x),\ x, p \in R^n, t \in [0,T]$$

で与えられる。但し，$A = (A_1, \ldots, A_n) \in R^n$。$[s,t]$ から $R^{2n}_{x,p}$ への経路全体の集合を $(R^{2n}_{x,p})^{[s,t]}$ と書く。このとき $(q,p) \in (R^{2n}_{x,p})^{[s,t]}$ に対する古典作用は

$$S(t,s;q,p) = \int_s^t \bigl(p(\theta)\cdot\dot{q}(\theta) - \mathcal{H}(\theta, q(\theta), p(\theta))\bigr)d\theta$$

で与えられる。$p \in R^n$ は正準運動量であり，$\Pi = mv \in R^n$ を力学的運動量とするとその関係は

$$p = \Pi + A(t,x) \tag{1}$$

となる。

$z_j(x,\Pi) \in C^\infty(R^{2n}_{x,\Pi})$ $(j = 1,2,\ldots,N)$ とし，$0 \le t_1 < t_2 < \ldots < t_N \le T$ とする。このとき，$(R^{2n}_{x,\Pi})^{[0,T]}$ 上の汎関数 $F(q,\Pi)$ を

$$F(q,\Pi) := \prod_{j=1}^N z_j(q(t_j), \Pi(t_j)) \tag{2}$$

で定める。この講演では，

$$\begin{aligned}&\text{“}q(T) = x \text{ となる全ての } (q,\Pi) \in (R^{2n}_{x,\Pi})^{[0,T]} \text{についての } (1/N)e^{S(T,0;q,p)}\\ &\times F(q,\Pi) f(q(0)) \text{ の和 ”} = \bigl(< F(q,\Pi) >_{S(T,0)}\ f\bigr)(x)\end{aligned} \tag{3}$$

を考える。但し N は正規化定数であり，$p = p(\theta) \in (R^n)^{[0,T]}$ は (1) に対応して

$$p(\theta) = \Pi(\theta) + A(\theta, q(\theta)),\ 0 \le \theta \le T \tag{4}$$

で定めるとする。この経路積分 (3) は，汎関数の位相空間経路積分と呼ばれる。

汎関数の経路積分は Feynman (1948)，Feynman-Hibbs (1965) で発見的方法で研究されている。数学的には，$z_j(x,\Pi) = 1$ $(j = 1,2,\ldots,N)$ の場合は，V, A に関する適当な条件の下でこの位相空間経路積分 (3) は収束し，対応する Schrödinger 方程式の解 $U(T,0)f$ と一致することが知られている (Gawedzki (1974), Daubechies-Klauder (1985), Ichinose (2000) 等)。但し $U(t,s)f$ は

$$i\frac{\partial}{\partial t}u(t) = H(t)u(t), \quad u(s) = f,$$

$$H(t) = \frac{1}{2m}\sum_{j=1}^{n}(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_j} - A_j(t,x))^2 + V(t,x) \tag{5}$$

の解である。又 $z_j(x,\Pi)$ が x_k, Π_l $(k,l = 1,2,\ldots,n)$ についての 2 次関数の時，この経路積分 (3) の収束と発散が調べられている (Ichinose 2003)。

本講演の目的は，一般的な関数 $z_j(x,\Pi)$ に対して汎関数経路積分 $< \prod_{j=1}^{N} z_j(q(t_j),\Pi(t_j)) >_{S(T,0)} \cdot f$ の収束又は発散を示し，収束する場合それの作用素による表示を与えることである。又 Feynman, Feynman-Hibbs で発見的方法で得られた結果に数学的証明を与えることである。

経路積分の正確な定義は講演中に与えることにして結果を述べる。$E(t,x) = (E_1,\ldots,E_n) \in R^n$ と $(B_{jk}(t,x))_{1\le j<k\le n} \in R^{n(n-1)/2}$ は各々電場，磁束密度

$$E_j = -\frac{\partial A_j}{\partial t} - \frac{\partial V}{\partial x_j}, \quad d(\sum_{j=1}^{n} A_j dx_j) = \sum_{1\le j<k\le n} B_{jk}dx_j \wedge dx_k \quad \text{on } R^n$$

を与えるとする。

Assumptions. $\partial_x^\alpha V(t,x)$ と $\partial_t^k \partial_x^\alpha A_j(t,x)$ $(j = 1,2,\ldots,n, k = 0,1)$ は全ての α について $[0,T]\times R^n$ で連続とする。又 $j = 1,2,\ldots,n$ と $1 \le j < k \le n$ について

$$|\partial_x^\alpha E_j(t,x)| \le C_\alpha,\ |\alpha| \ge 1, \quad |\partial_x^\alpha B_{jk}(t,x)| \le C_\alpha(1+|x|)^{-(1+\delta)},\ |\alpha| \ge 1,\ \delta = \delta(\alpha) > 0, \tag{6}$$

$$|\partial_x^\alpha A_j(t,x)| \le C_\alpha,\ |\alpha| \ge 1, \quad |\partial_x^\alpha V(t,x)| \le C_\alpha(1+|x|),\ |\alpha| \ge 1 \tag{7}$$

を仮定する。

$\|\cdot\|$ は L^2 norm を表すとし，$a = 1,2,\ldots$ について

$$B^a := \{f \in L^2;\ \|f\|_{B^a} := \|f\| + \sum_{|\alpha|=a}(\|x^\alpha f\| + \|(\frac{\partial}{\partial x})^\alpha f\|) < \infty\} \tag{8}$$

とおく。又 $B^0 = L^2$ とおく。

Theorem. ある適当な整数 $M_j \ge 0$ $(j = 1,2,\ldots,N)$ が存在して，任意の α と β に対して

$$|\partial_\Pi^\alpha \partial_x^\beta z_j(x,\Pi)| \le C_{\alpha,\beta}(1+|x|+|\Pi|)^{M_j} \tag{9}$$

が成り立つとする。$M = \sum_{j=1}^{N} M_j$ とおく。このとき，上の仮定の下で次の (i), (ii) が成り立つ。
(i)

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 z_j}{\partial x_k \partial \Pi_k}(x,\Pi) = 0 \quad \text{in } R^{2n} \tag{10}$$

$(j = 1,2,\ldots,N)$ を仮定する。このとき，任意の $f \in B^{M+a}$ に対して経路積分 $< \prod_{j=1}^{N} z_j(q(t_j),\Pi(t_j)) >_{S(T,0)} f$ は B^a で収束し，$U(T,t_N)Z_N(t_N)U(t_N,t_{N-1})\cdots > Z_1(t_1)U(t_1,0)f$ と一致する。但し，$Z_j(t)$ は 2 重表象をもつ擬微分作用素¿$Z_j(X, D_x - \int_0^1 A(t, X+\theta(X'-X))d\theta)$ である。¿
(ii) $N = 1$ とする。今 $z_1(x,\Pi)$ について (10) が成立しないと仮定する。このとき，ある適当な $f \in C_0^\infty$

が存在して経路積分 $< z_1(q(t_1), \Pi(t_1)) >_{S(T,0)} f$ は L^2 で発散，従って任意の B^a $(a = 0, 1, \dots)$ で発散する。

Applications of Theorem. Feynman (1948), Feynman-Hibbs (1965) では，汎関数の配位空間経路積分が研究され，発見的方法でいくつかの公式が与えられている。上記の Theorem の (i) を用いることにより，この経路積分についての公式に数学的証明を与えることができる。例えば次が分る。$p(\theta)$ は (4) で定めるとする。$a = 0, 1, \dots$ とする。
(i) $f \in B^{a+1}$ に対して $< p_j(t_1) >_{S(T,0)} f$ は B^a で収束し，$U(T, t_1)(1/i)\partial_{x_j} U(t_1, 0)f$ と一致する。
(ii) $f \in B^{a+2}$ に対して $< \mathcal{H}(t_1, q(t_1), p(t_1)) >_{S(T,0)} f$ は B^a で収束し，$U(T, t_1)H(t_1)U(t_1, 0)f$ と一致する。$H(t)$ は (5) で定めた Hamilton 作用素である。
(iii) $f \in B^{a+2}$ に対して $< (1/2m)|\Pi(t_1)|^2 >_{S(T,0)} f$ は B^a で収束し，$U(T, t_1)(1/2m)\left(\sum_{j=1}^n \hat{\Pi}_j(t)^2\right) \cdot U(t_1, 0)f$ と一致する。但し，$\hat{\Pi}_j(t)f := (1/i)\partial_{x_j} f - A_j(t, x)f$ であり，$(1/2m)|\Pi(t)|^2$ は古典力学の運動エネルギーである。
(iv) $j \neq k$ とする。このとき，$f \in B^{a+2}$ に対して $< p_j(t_1)q_k(t_1) >_{S(T,0)} f$ は B^a で収束し，$U(T, t_1)(1/i)\partial_{x_j}\hat{x}_k U(t_1, 0)f$ と一致する。$\hat{x}_k$ はかけ算作用素 $(\hat{x}_k f)(x) = x_k f(x)$ である。

一方，Theorem の (ii) を用いることにより，$< p_j(t_1)q_j(t_1) >_{S(T,0)} f$ と $< p_j(t_1)^2 >_{S(T,0)} f$ は一般には収束しないことがわかる。この結果は量子力学の不確定性原理に関係し，Theorem の (ii) から分るように多くの汎関数経路積分 (3) は一般には収束しないことがわかる。

参考文献

[1] S. Albeverio and R. J. Høegh-Krohn, “Mathematical theory of Feynman path integrals,” Lecture Notes in Math., Vol. 523, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1976.

[2] I. Daubechies and J. R. Klauder, Quantum-mechanical path integrals with Wiener measure for all polynomial Hamiltonians. II, *J. Math. Phys.* **26** (1985), 2239-2256.

[3] R. P. Feynman, Space-time approach to non-relativistic quantum mechanics, *Rev. Mod. Phys.* **20** (1948), 367-387.

[4] R. P. Feynman, An operator calculus having applications in quantum electrodynamics, *Phys. Rev.* **84** (1951), 108-128.

[5] R. P. Feynman and A. R. Hibbs, “Quantum Mechanics and Path Integrals,” McGraw-Hill, New York, 1965.

[6] D. Fujiwara, “ファインマン経路積分の数学的方法,” シュプリンガー・フエアラーク東京，1999.

[7] K. Gawędzki, Construction of quantum-mechanical dynamics by means of path integrals in phase space, *Rep. Math. Phys.* **6** (1974), 327-342.

[8] W. Ichinose, On the formulation of the Feynman path integral through broken line paths, *Commun. Math. Phys.* **189** (1997), 17-33.

[9] W. Ichinose, The phase space Feynman path integral with gauge invariance and its convergence, *Rev. Math. Phys.* **12** (2000), 1451-1463.

[10] W. Ichinose, Convergence of the Feynman path integral in the weighted Sobolev spaces and the representation of correlation functions, to appear in *J. Math. Soc. Japan* in 2003.

[11] W. Ichinose, A mathematical theory of the phase space Feynman path integral of the functional, preprint.

[12] G. W. Johnson and M. L. Lapidus, "The Feynman Integral and Feynman's Operational Calculus," Oxford Univ. Press, Oxford, 2000.

[13] M. B. Mensky, "Continuous Quantum Measurements and Path Integrals," Institute of Physics Publishing Ltd., Bristol and Philadelphia, 1993.