ON THE ASYMPTOTICS OF SOLUTIONS FOR
SOME SCHRÖDINGER EQUATIONS WITH
DISSIPATIVE PERTURBATIONS OF RANK ONE

門脇 光輝 (都立航空高専), 中澤 秀夫 (東海大非常勤), 渡辺 一雄 (学習院大)

Hilbert 空間 $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^1)$ の内積を $\langle \cdot, \cdot \rangle$ そしてそのノルムを $\|\cdot\|$ と書くことにする. また $H^s(\mathbb{R}^1)$ (s 次の Sobolev 空間) を $\mathcal{H}^s$ と書くことにする.

$\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2, \alpha_1 \leq 0, \alpha_2 \leq 0$ について以下のような Kadowaki, Nakazawa and Watanabe[2] で取り扱った原点に Dirac 関数型の摂動を持つ 1 次元シュレディンガー作用素 H_α を考える (cf. Albeverio and Kurasov[1]).

$$\begin{cases} \mathfrak{D}(H_\alpha) = \{u \in \mathcal{H}^1 : u'(+0) - u'(-0) = \alpha u(0), \chi_{(0,\infty)} u'' + \chi_{(-\infty,0)} u'' \in \mathcal{H}\} \\ H_\alpha u = -(\chi_{(0,\infty)} u'' + \chi_{(-\infty,0)} u'') \end{cases}$$

ここに u' は u の超関数の意味での微分を表し, $\chi_{(0,\infty)}, \chi_{(-\infty,0)}$ は x についての特性関数を表す. H_α (resp. H_{α_1}) は 縮小半群 e^{-itH_α} (resp. ユニタリー群 $e^{-itH_{\alpha_1}}$) を生成することを注意しておく.

ここではシュレディンガー方程式

$$(1) \quad i\partial_t u = H_\alpha u, \quad u|_{t=0} = f, \quad f \in L^2(\mathbb{R}^1)$$

の解の挙動を H_α のスペクトルに基いて考える (系 4).

H_α のスペクトルについて既に次のことが分かっている.

定理 1 ([2]). $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$ with $\alpha_1 \leq 0, \alpha_2 \leq 0$ のとき

$$\sigma(H_\alpha) = \begin{cases} [0, \infty) \cup \{-\frac{\alpha^2}{4}\} & (\alpha_1 < 0) \\ [0, \infty) & (\alpha_1 = 0) \end{cases}.$$

とくに

$$\sigma_p(H_\alpha) = \begin{cases} \{-\frac{\alpha^2}{4}\} & (\alpha_1 < 0) \\ \emptyset & (\alpha_1 = 0) \end{cases}.$$

さらに $-\frac{\alpha^2}{4}$ ($\alpha_1 \neq 0$) に付随する射影作用素は

$$P_{-\alpha^2/4} f = -\alpha/2 \langle f, e^{(\bar{\alpha}|\cdot|)/2} \rangle e^{(\alpha|x|)/2}.$$

となる.

定理 1 と Reed -Simon [5] Theorem XII.5 から 任意の $f \in \mathcal{H}$ に対してある $f_s \in \text{Ker} P_{-\frac{\alpha^2}{4}}$ と $f_d \in \text{Range} P_{-\frac{\alpha^2}{4}}$ が一意に決まり

$$(2) \quad f = f_s + f_d$$

と分解できる．このとき

$$(3) \quad f \in \text{Ker} P_{-\frac{\alpha_2}{4}} \iff \langle f, e^{(\overline{\alpha}|\cdot|)^2/2} \rangle = 0.$$

となることを注意しておく．

消散系に対する Enss の方法 (cf. Simon[6]) によると次も得られることが分かっている．

命題 2 ([2]). $\alpha_1 \leq 0, \alpha_2 < 0$ のとき 波動作用素

$$W(\alpha) = s\text{-}\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{itH_0} e^{-itH_\alpha}$$

が $\mathcal{H}$ から $\mathcal{H}$ への非自明有界作用素として存在する．

波動作用素 $W(\alpha)$ の存在から (1) の解の時間発展に伴う挙動は散乱または消散に限られる．そこで我々は次の結果を得た

定理 3.

(i) $\alpha_1 < 0, \alpha_2 < 0$ のとき

$$\text{Ker} W(\alpha) = \text{Range} P_{-\frac{\alpha_2}{4}}.$$

(ii) $\alpha_1 = 0, \alpha_2 < 0$ のとき

$$\text{Ker} W(i\alpha_2) = \{0\}.$$

系 4 (初期条件による解の挙動の分類).

(i) $\alpha_1 < 0, \alpha_2 < 0$ のとき各 $f \in \mathcal{H}$ に対して (2) の分解を考えると

$$(S) \quad f_s \neq 0 \iff \begin{cases} \lim_{t \rightarrow \infty} \|e^{-itH_\alpha} f - e^{-itH_0} W(\alpha) f\| = 0 \\ W(\alpha) f \neq 0, \end{cases}$$

$$(D) \quad f_s = 0 \iff \lim_{t \rightarrow \infty} \|e^{-itH_\alpha} f\| = 0 \quad (e^{-itH_\alpha} f = e^{i\frac{\alpha_2}{4}t} f_d),$$

となる．

(ii) $\alpha_1 = 0, \alpha_2 < 0$ のとき

$$f \in \mathcal{H} \quad \text{and} \quad f \neq 0 \iff \begin{cases} \lim_{t \rightarrow \infty} \|e^{-itH_{i\alpha_2}} f - e^{-itH_0} W(i\alpha_2) f\| = 0 \\ W(i\alpha_2) f \neq 0 \end{cases}$$

系 4 は生成作用素が自己共役の場合に対応する結果である．しかしここでの系のように解の挙動が 2 種類以上 (散乱、消散など) 存在するであろう消散系に対してこのような結果を与えたのは初めてとおもわれる (これまでの結果は散乱解または消散解のいずれかに着目した結果がほとんどであると思われる).

定理 3 を証明するためには一般化されたパーセバルの等式 (補題 6 cf. Pavlov[6]) を必要とする．そしてそれは [2] で述べられている H_α に対する一般化されたフーリエ変換 (補題 5 cf. Kuroda[3]) を用いて表現される．

補題 5. $\alpha_1 \leq 0, \alpha_2 < 0$ のとき

$$\mathcal{F}_\alpha = \mathcal{F}_0 W(\alpha).$$

と定義すると $\mathcal{F}_\alpha$ は次のようにかける

$$(\mathcal{F}_\alpha f)(k) = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{|x| < R} \overline{\psi_\alpha(x, k)} f(x) dx \quad \text{in } \mathcal{H}$$

for any $f \in \mathcal{H}$, ここで

$$\overline{\psi_\alpha(x, k)} = (2\pi)^{-1/2} \left(e^{-ixk} + \frac{\alpha}{(2i|k| - \alpha)} e^{i|x||k|} \right).$$

さらに

$$(3.6) \quad (\mathcal{F}_\alpha H_\alpha f)(k) = |k|^2 (\mathcal{F}_\alpha f)(k) \quad \text{for } f \in \mathfrak{D}(H_\alpha).$$

補題 6(パーセバルの等式).

(i) 任意の $f, g \in \mathcal{H}$ と $\alpha \in \{\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2; \alpha_1 < 0\}$ に対して次が成立

$$\langle \mathcal{F}_\alpha f, \mathcal{F}_\alpha g \rangle = \langle f, g \rangle + \frac{\alpha}{2} \langle f, e^{(\bar{\alpha}|\cdot|)/2} \rangle \langle e^{(\alpha|\cdot|)/2}, g \rangle.$$

(ii) 任意の $f, g \in \mathcal{H} \cap L^1(\mathbb{R}^1)$ に対して次が成立する

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \langle F_{i\alpha_2} f, \chi_\varepsilon F_{-i\alpha_2} g \rangle = \langle f, g \rangle + \frac{i\alpha_2}{4} \int_{\mathbb{R}^1} e^{\frac{i\alpha_2}{2}|x|} f(x) dx \int_{\mathbb{R}^1} e^{\frac{i\alpha_2}{2}|y|} \overline{g(y)} dy,$$

ただし χ_a は $\{k \in \mathbb{R}; a \leq ||k| + \alpha_2/2\}$ for $a > 0$ についての特性関数.

REFERENCES

1. S. Albeverio and P. Kurasov, *Singular perturbations of differential operators*, London Math. Soc. Lect. Note Ser. No. 271, Cambridge Univ. Press, 2000.
2. M. Kadowaki, H. Nakazawa and K. Watanabe, *Spectral and scattering theory for Schrödinger operators with complex rank one potentials*, 2002 年度会函数方程式論分科会アブストラクト, pp.116-117.
3. S. T. Kuroda, *Spectral theory II*, Iwanami, Tokyo, 1978.
4. B. S. Pavlov, *The nonself-adjoint Schrödinger operators*, Topics in Math. Phys. **1** (1967), Consultants Bureau, New-York, 87-114.
5. M. Reed and B. Simon, *Methods of modern mathematical physics, IV, Analysis of operators*, Academic Press, 1978.
6. B. Simon, *Phase space analysis of simple scattering systems : extensions of some work of Enns*, Duke Math. J. **46** (1979), 119-168.