非線形分散型方程式の解の存在について (SURVEY)

加藤 圭一（東京理科大・理）

この講演では、J. Bourgain 氏 [1] によって始められた Fourier ristriction norm method と言われている方法を紹介する。具体的には、以下の KdV 方程式の初期値問題を考え、Kenig-Ponce-Vega[2],[3] の内容を紹介する。

$$(1)\qquad \begin{cases} \partial_t u + \partial_x^3 u + \frac{1}{2}\partial_x(u^2) = 0, & \text{in } \mathbb{R}\times\mathbb{R}, \\ u(0,x) = \phi(x), & \text{in } \mathbb{R}. \end{cases}$$

Definition 1. s, b を実数とする。関数空間 X_b^s を以下のように定義する。この種の関数空間を用いて分散型方程式の解の存在を示す方法を *Fourier ristriction norm method* と呼んでいる。

$$(2)\quad X_b^s = \left\{ f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2); \|f\|_{X_b^s} = \|\langle\xi\rangle^s \langle\tau-\xi^3\rangle^b \hat{f}(\tau,\xi)\|_{L^2_{\tau,\xi}} < +\infty \right\}.$$

ここで、$\langle\cdot\rangle = (1+|\cdot|^2)^{1/2}$ であり、$\hat{f}(\tau,\xi)$ は $f(t,x)$ の時空間変数に関する *Fourier* 変換である。

初期値問題(1) を直接考えるのではなく初期値問題(1) に付随する積分方程式

$$(3)\qquad u(t) = U(t)\phi + \frac{1}{2}\int_0^t U(t-s)\partial_x(u(s)^2)ds,$$

を考える。ここで、$U(t)\phi = \exp(-t\partial_x^3)\phi = \mathcal{F}^{-1}\exp(it\xi^3)\mathcal{F}\phi$ である。コンパクトな台をもつ C^∞ 級関数 ψ を $|t|\le 1$ のとき $0\le\psi\le 1$, $\psi(t)=1$、$|t|\ge 2$ のとき $\psi(t)=0$ を満たすものとする。$\psi_T(t)=\psi(t/T)$ とおく。以下では、上の積分方程式ではなく、次の積分方程式を考える。

$$(4)\qquad u(t,x) = \psi_T(t)U(t)\phi + \frac{1}{2}\psi_T(t)\int_0^t U(t-s)\partial_x(u(s)^2)ds.$$

紹介する主な主張は以下である。

Theorem 1. $s > -3/4$ とし、$\phi \in H^s(\mathbb{R})$ とする。 そのとき、ある $T>0$ に対し(4) の一意解 $u(t,x)$ が X_b^s の中に存在する。

上記定理を証明するために、2、3 の命題を述べておく。

Date: 2003 年 4 月 26 日.

Lemma 1. $b > 1/2$ ならば、$\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ に対し

$$\|\psi(t)U(t)\psi\|_{X_b^s} \leq C_1 \|\psi\|_{H^s}.$$

Lemma 2. $b > 1/2$ ならば、$f(t,x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ に対し

$$\|\psi(t)\int_0^t U(t-s)f(s,x)ds\|_{X_b^s} \leq C_2 \|f\|_{X_{b-1}^s}.$$

Lemma 3. $s > -3/4$ に対し、$b \in (1/2, 3/4)$ が存在して

$$\|\partial_x(fg)\|_{X_{b-1}^s} \leq C_3 \|f\|_{X_b^s} \|g\|_{X_b^s}.$$

References

[1] J. Bourgain, *Fourier ristriction phenomena for certain lattice subset and applications to nonlinear evolution equations: PartII the KdV equation*, Geom. and Funct. Anal. **3**(1993), 209–262.

[2] C. E. Kenig, G. Ponce and L. Vega, *The Cauchy problem for the Korteweg-de Vries equation in Sobolev spaces of negative indices*, Duke Math. J. **71**(1993), 1–21.

[3] C. E. Kenig, G. Ponce and L. Vega, *A bilinear estimate with applications to the KdV equation* , Jour. of Amer. Math. Soc. **9**(1996), 573 – 603.