The inviscid limit for the complex Ginzburg-Landau equation

町原 秀二 (島根大学)
中村 能久 (熊本大学)

本講演では, 複素 Ginzburg–Landau 方程式の粘性消滅極限 (inviscid limit) について考える. まず次の 2 つの非線形方程式を導入する.

$$\begin{cases} \partial_t u = (a+i\nu)\Delta u - (b+i\mu)|u|^{p-1}u, \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{CGL}$$

$$\begin{cases} \partial_t v = i\nu\Delta v - i\mu|v|^{p-1}v, \\ v(0) = v_0, \end{cases} \tag{NLS}$$

ここで, u と v は $(0,\infty)\times\mathbb{R}^n$ 上の未知の複素数値関数で, パラメーター $p>1, a>0, b>0$, ν, μ は実数である. ここでは簡単のため, $\nu = \mu = 1$ と仮定する. 形式的に(CGL) に $a=b=0$ を代入すると, (CGL) は(NLS) と一致する. そこで我々は $a\to 0$, $b\to 0$ とした時に(CGL) の解がどのように(NLS) の解に収束するかについて考察する. すなわち, (CGL) の解と(NLS) の解の差のある空間におけるノルムをはかり, その 0 への収束に対する a, b の依存度を調べる. 以後, $\varepsilon = (a,b)$ と記し $\varepsilon\to 0$ は $a\to 0$ かつ $b\to 0$ を意味する.

簡単のため, $f(w) = |w|^{p-1}w$ と記する. このときデュアメルの原理により, (CGL) と(NLS) はそれぞれ以下のような積分方程式に書き直すことが出来る.

$$\begin{aligned} \mathrm{CGL}_{int}: \quad & u_\varepsilon(t) = T_a(t)u_{0\varepsilon} - (b+i)\int_0^t T_a(t-s)f(u_\varepsilon(s))ds \\ & \text{with} \quad T_a(t) = e^{(a+i)\Delta t}, \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{NLS}_{int}: \quad & v(t) = U(t)v_0 - i\int_0^t U(t-s)f(v(s))ds \\ & \text{with} \quad U(t) = e^{i\Delta t}. \end{aligned} \tag{2}$$

まず, 初期値が L^2 に属するとき, (NLS) が解を持つための条件と同じ条件の下での(CGL) の解の存在定理を述べる. 初期値が H^1 に属する場合も同様に証明できる (例えば [3],[4] を見よ).

Theorem 1 *Let ε be fixed. Let $p < 1+4/n$ and $u_{0\varepsilon}\in L^2$. Then there exists a unique solution for* (CGL) *such that*

$$u_\varepsilon \in C([0,\infty);L^2)\cap L^r_{loc}(0,\infty;L^{p+1}),$$

for $r = 4(p+1)/n(p-1)$*. Moreover for any admissible pair* (q,s)*, which satisfies* $0 \le 2/s = n(1/2 - 1/q) \le 1$*, and* $T > 0$*,*

$$\|u_\varepsilon\|_{L^s(0,T;L^q)} < \infty. \tag{3}$$

次に $\varepsilon \to 0$ としたときの収束定理を2つ挙げる．ここで初期値はそれぞれ L^2 または H^1 に属するものとする．

Theorem 2 *Let* $p < 1 + 4/n$*. Let* $u_{0\varepsilon} = v_0 \in L^2$*. Then for any* $T > 0$*,*

$$\|u_\varepsilon - v\|_{L^\infty(0,T;L^2)} \le o(1) + O(b). \tag{4}$$

Theorem 3 *Let* $p < 1 + 4/(n-2)$ *for* $n \ge 3$*. Let* $u_{0\varepsilon} = v_0 \in H^1$*. Then for any* $T > 0$*,*

$$\|u_\varepsilon - v\|_{L^\infty(0,T;L^2)} \le o(\sqrt{a}) + O(b), \tag{5}$$

$$\|u_\varepsilon - v\|_{L^\infty(0,T;H^1)} \le o(1) + O(b). \tag{6}$$

[5] と同じ議論により, 上で得られた収束オーダーが最良であることがわかる．

定理1は縮小写像の原理によって証明される．このとき、次の $T_a(t)$ に対する Strichartz 型評価が重要な役割を果たす．なお $U(t)$ に対する Strichartz 評価はよく知られている (例えば [4] を見よ).

Lemma 4 *Let* (q_j, r_j)*,* $j = 1,2,3$*, be admissible pairs. Then the following estimates hold.*

$$\|T_a(t)u\|_{L^{q_1}(0,\infty;L^{r_1})} \le C_1\|u\|_{L^2}, \tag{7}$$

$$\left\|\int_0^t T_a(t-s)f(s)ds\right\|_{L^{q_2}(0,T;L^{r_2})} \le C_2\|f\|_{L^{q_3'}(0,T;L^{r_3'})}, \tag{8}$$

for any $u \in L^2, f \in L^{q_3'}(0,T;L^{r_3'})$ *with* $T > 0$*. Here the constants* C_1 *and* C_2 *are independent of* u, f, T *and* a*.*

(2) と(1) の差をそれぞれの空間のノルムで評価することにより, 定理2,3は得られる．

参考文献

[1] P. Bechouche and A. Jüngel, *Inviscid limits of the complex Ginzburg–Landau equation*, Commun. Math. Phys. **214** (2000), 201–226.

[2] J. Ginibre and G. Velo, *The Cauchy problem in local spaces for the complex Ginzburg-Landau equation I. Compactness methods*, Physica D **95** (1996), 191–228.

[3] J. Ginibre and G. Velo, *The Cauchy problem in local spaces for the complex Ginzburg-Landau equation II. Contraction methods*, Commun. Math. Phys. **187** (1997), 45–79.

[4] T. Kato, *Nonlinear Schrödinger equations*, in “Schrödinger operators”, (H. Holden and A. Jensen eds.) Lecture Notes in Physics **345** Springer-Verlag, Berlin-New York, (1989), 218-263.

[5] S. Machihara, K. Nakanishi and T. Ozawa, *Nonrelativistic limit in the energy space for nonlinear Klein–Gordon equations*, Math. Ann. **322** (2002) 603–621.

[6] N. Okazawa and T. Yokota, *Monotonicity method for the complex Ginzburg-Landau equation, including smoothing effect*, 3rd World Congress of Nonlinear Analysts (Catania, Sicily, 2000), Nonlinear Analysis **47** (2001), 79–88.

[7] B. Wang, *The Limit Behavior of Solutions for the Cauchy Problem of the Complex Ginzburg–Landau Equation*, Comm. Pure Appl. Math. **55** (2002) 481–508.

[8] J. Wu, *The inviscid limit of the complex Ginzburg–Landau equation*, J. Differential Equations **142** (1998), 413–433.