Instability of standing waves for nonlinear Klein-Gordon equations in supercritical case

太田 雅人 (埼玉大学理学部)

非線形 Klein-Gordon 方程式

$$\partial_t^2 u - \Delta u + u = |u|^{p-1}u, \quad (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \tag{1}$$

の standing wave 解 $e^{i\omega t}\phi_\omega(x)$ の不安定性について考える．ここで, $n \geq 2$, $1 < p < 1 + 4/(n-2)$, $\omega \in (-1,1)$ とし, ϕ_ω は $H^1(\mathbb{R}^n)$ に属する

$$-\Delta\phi + (1-\omega^2)\phi = |\phi|^{p-1}\phi, \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{2}$$

の一意的な正値球対称解とする． Shatah [5] により, $p < 1 + 4/n$, $\omega_c < |\omega| < 1$ のとき, 軌道安定であることが, また, Shatah and Strauss [7] により, $p < 1 + 4/n$, $|\omega| < \omega_c$ または $p \geq 1 + 4/n$, $|\omega| < 1$ のとき, 軌道不安定であることが示されている．ここで, $\omega_c = \sqrt{(p-1)/\{4-(n-1)(p-1)\}}$．この講演では, 軌道不安定性よりも強い意味での不安定性について考察したい．以下, $X = H^1_{rad}(\mathbb{R}^n) \times L^2_{rad}(\mathbb{R}^n)$,

$$\mathcal{N}_\delta(\phi_\omega) = \{(u,v) \in X : \inf_{\theta\in\mathbb{R}} \|(u,v) - e^{i\theta}(\phi_\omega, i\omega\phi_\omega)\|_X < \delta\}$$

とおき, 次のように定義する．

定義 1 (i) 次が成り立つとき, $e^{i\omega t}\phi_\omega$ は**軌道安定**であるという: $\forall\varepsilon > 0$, $\exists\delta > 0$ s.t. $(u_0,u_1) \in \mathcal{N}_\delta(\phi_\omega)$ ならば, $(u(0), \partial_t u(0)) = (u_0,u_1)$ なる (1) の解 $u(t)$ は, $\forall t \geq 0$ に対して存在し, $(u(t), \partial_t u(t)) \in \mathcal{N}_\varepsilon(\phi_\omega)$.
(ii) 軌道安定でないとき, **軌道不安定**であるという．

定義 2 (i) 次が成り立つとき, $e^{i\omega t}\phi_\omega$ は**爆発不安定**であるという: $\forall\varepsilon > 0$, $\exists(u_0,u_1) \in \mathcal{N}_\varepsilon(\phi_\omega)$ s.t. $(u(0), \partial_t u(0)) = (u_0,u_1)$ なる (1) の解 $u(t)$ は有限時間で爆発する．
(ii) 次が成り立つとき, $e^{i\omega t}\phi_\omega$ は**強不安定**であるという: $\forall\varepsilon > 0$, $\exists(u_0,u_1) \in \mathcal{N}_\varepsilon(\phi_\omega)$ s.t. $(u(0), \partial_t u(0)) = (u_0,u_1)$ なる (1) の解 $u(t)$ は, 有限時間で爆発するか, または, $\forall t \geq 0$ に対して存在し, $\sup_{t\geq 0} \|(u(t), \partial_t u(t))\|_X = \infty$.

Berestycki and Cazenave [1] は, $p > 1$, $\omega = 0$ のとき, $e^{i\omega t}\phi_\omega$ は爆発不安定であることを示した．また, Shatah [6] は, $n \geq 3$, $\omega = 0$ のとき, 一般的な

この講演は Grozdena Todorova (Univ. Tennessee) との共同研究に基づく

非線形項に対して, $e^{i\omega t}\phi_\omega$ の強不安定性を示した. 最近, Ohta and Todorova [4] は, $n \geq 3$, $p > 1$, $|\omega| \leq \sqrt{(p-1)/(p+3)}$ のとき, $e^{i\omega t}\phi_\omega$ は爆発不安定であることを示した. 今回の主結果は次の定理 3 である.

定理 3 $n \geq 2$, $1 + 4/n \leq p < 1 + 4/(n-2)$ のとき, $\forall \omega \in (-1, 1)$ に対して, $e^{i\omega t}\phi_\omega$ は強不安定である.

注意 4 $p \leq \min\{n/(n-2), 5\}$ のとき, Cazenave [2] により, (1) の任意の時間大域解は $H^1 \times L^2$ において有界であることが示されている. この場合は, 強不安定性から爆発不安定性が従う.

定理 3 の証明は, (1) の解 $u(t)$ に対する等式

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\operatorname{Re}\int_{\mathbb{R}^n} \partial_t u(t,x)\{2x\cdot\overline{\nabla u(t,x)} + n\overline{u(t,x)}\}\,dx = -4P(u(t)), \\
&P(u) = \frac{1}{2}\|\nabla u\|_2^2 - \frac{n(p-1)}{4(p+1)}\|u\|_{p+1}^{p+1}
\end{aligned} \tag{3}
$$

に基づく. 但し, (3) の左辺の積分はエネルギー空間 $H^1 \times L^2$ では定義されないので, 重み関数 x を有界な関数で近似する必要がある. Shatah [6] は, 等式

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\operatorname{Re}\int_{\mathbb{R}^n} \partial_t u(t,x)x\cdot\overline{\nabla u(t,x)}\,dx = -\frac{n}{2}\|\partial_t u(t)\|_2^2 + nK_1(u(t)), \\
&K_1(u) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right)\|\nabla u\|_2^2 + \frac{1}{2}\|u\|_2^2 - \frac{1}{p+1}\|u\|_{p+1}^{p+1}
\end{aligned} \tag{4}
$$

に基づき, 重み関数 x を有界な関数で近似している. また, Berestycki and Cazenave [1], Ohta and Todorova [4] は, 等式

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}\|u(t)\|_2^2 = \frac{d}{dt}\operatorname{Re}\int_{\mathbb{R}^n} \partial_t u(t,x)\overline{u(t,x)}\,dx = \|\partial_t u(t)\|_2^2 - K_2(u(t)), \\
&K_2(u) = \|\nabla u\|_2^2 + \|u\|_2^2 - \|u\|_{p+1}^{p+1}
\end{aligned} \tag{5}
$$

に基づいている. さらに, Berestycki and Cazenave [1] は, 非線形 Schrödinger 方程式

$$
i\partial_t u = -\Delta u - |u|^{p-1}u, \quad (t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \tag{6}
$$

に対して, 等式

$$
\frac{d^2}{dt^2}\|xu(t)\|_2^2 = 4\frac{d}{dt}\operatorname{Im}\int_{\mathbb{R}^n} \overline{u(t,x)}x\cdot\nabla u(t,x)\,dx = 16P(u(t)) \tag{7}
$$

に基づいて, $p > 1+4/n$ のとき, $\forall\omega > 0$ に対して, $e^{i\omega t}\phi_\omega$ は爆発不安定であることを示している. また, Ogawa and Tsutsumi [3] は, 等式 (7) において, 重み関数 x を有界な関数で近似し, $n \geq 2$, $1+4/n \leq p < \min\{1+4/(n-2), 5\}$ のとき, $H^1_{rad}(\mathbb{R}^n)$ における (6) の解の爆発を示している.

References

[1] H. Berestycki and T. Cazenave, Instabilité des états stationnaires dans les équations de Schrödinger et de Klein-Gordon non linéaires, C. R. Acad. Sci. Paris. **293** (1981) 489–492.

[2] T. Cazenave, Uniform estimates for solutions of nonlinear Klein-Gordon equations, J. Funct. Anal. **60** (1985) 36–55.

[3] T. Ogawa and Y. Tsutsumi, Blow-up of H^1 solution for the nonlinear Schrödinger equation, J. Differential Equations **92** (1991), 317–330.

[4] M. Ohta and G. Todorova, Strong instability of standing waves for nonlinear Klein-Godon equations, Preprint.

[5] J. Shatah, Stable standing waves of nonlinear Klein-Gordon equations, Comm. Math. Phys. **91** (1983), 313–327.

[6] J. Shatah, Unstable ground state of nonlinear Klein-Gordon equations, Trans. Amer. Math. Soc. **290** (1985), 701–710.

[7] J. Shatah and W. Strauss, Instability of nonlinear bound states, Comm. Math. Phys. **100** (1985) 173–190.