空間2次元に於けるKlein-Gordon-Schrödinger 方程式系の波動作用素について

下村 明洋
(学習院大学理学部数学科)

本講演では，空間2次元に於いて，湯川型相互作用を持つKlein-Gordon-Schrödinger 方程式系の散乱理論を考える:

$$\begin{cases} i\partial_t u + \dfrac{1}{2}\Delta u = uv, \\ \partial_t^2 v - \Delta v + v = -|u|^2. \end{cases} \tag{KGS}$$

ここで，u と v はそれぞれ $(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ 上の複素数値及び実数値の未知関数である．Klein-Gordon 方程式の自由解は，空間2次元に於いて $O(t^{-1})$ で時間減衰するので，方程式系(KGS) の第1式は，$O(t^{-1})$ で時間減衰するようなポテンシャルを持つ Schrödinger 方程式と (大雑把に) 考えることが出来る．したがって，この非線形散乱問題は短距離型散乱と長距離型散乱の境目に相当すると考えられる．この研究 [2] では，与えられた散乱データの Fourier 変換の台に制限を設けずに，小さな散乱データに対して，波動作用素の存在を示した．

任意の実数 s, m に対して，重み付き Sobolev 空間

$$H^{s,m} = \{\psi \in \mathcal{S}' \colon \|\psi\|_{H^{s,m}} = \|(1+|x|^2)^{m/2}(1-\Delta)^{s/2}\psi\|_{L^2} < \infty\}$$

を，任意の自然数 k, $1 \le p \le \infty$ を満たす実数 p に対して，Sobolev 空間

$$W_p^k = \left\{ \psi \in L^p \colon \|\psi\|_{W_p^k} = \sum_{|\alpha| \le k} \|\partial^\alpha \psi\|_{L^p} < \infty \right\}$$

を導入する．

与えられた散乱データ (ϕ, ψ_0, ψ_1) に対して，

$$u_0(t,x) = (U(t)\phi)(x),$$
$$v_0(t,x) = ((\cos\Omega t)\psi_0)(x) + ((\Omega^{-1}\sin\Omega t)\psi_1)(x)$$

とする．ここで，

$$U(t) = e^{\frac{it}{2}\Delta}, \quad \Omega \equiv (1-\Delta)^{1/2}$$

である．これらは，それぞれ Schrödinger 方程式及び Klein-Gordon 方程式の自由解である．

この研究の主結果は，次の定理である:

定理. 散乱データのノルムの和

$$\|\phi\|_{H^{2,4}} + \|g^5\Omega^4\hat{\phi}\|_{L^2(D)} + \|\psi_0\|_{H^{12,7}} + \|\psi_0\|_{W_1^4} + \|\psi_1\|_{H^{11,7}} + \|\psi_1\|_{W_1^3}$$

は，十分小さいとする．ここで，D は原点を中心とする開単位円板，

$$g(x) = \frac{2}{2(1-|x|^2)^{3/2} - |x|^2}$$

である．このとき，方程式系(KGS) の解 $[u, v]$ で，次をみたすものが一意に存在する:

$$\begin{gathered} u \in C([0,\infty); H^2), \\ v \in C([0,\infty); H^2) \cap C^1([0,\infty); H^1), \\ \sup_{t\geq 0}\left[(1+t)\left\{\|u(t) - u_0(t)\|_{H^2} + \left(\int_t^\infty \|u(s) - u_0(s)\|_{W_4^2}^4\, ds\right)^{1/4}\right\}\right] < \infty, \\ \sup_{t\geq 0}[(1+t)(\|v(t) - v_0(t)\|_{H^2} + \|\partial_t v(t) - \partial_t v_0(t)\|_{H^1})] < \infty. \end{gathered}$$

注意. 先に述べたように，この定理では散乱データの大きさのみを制限し，散乱データの Fourier 変換の台は制限していない．(この問題に関してこれまでに得られている結果 Ozawa and Tsutsumi [1] では，この両方に制限が設けられている)．

系. 定理の仮定を満たす散乱データ (ϕ, ψ_0, ψ_1) 全体を，$\mathcal{V}$ とする．このとき，波動作用素 $W_+ \colon (\phi, \psi_0, \psi_1) \mapsto (u(0), v(0), \partial_t v(0))$ が，$\mathcal{V}$ 上で定義される．ここで，$[u, v]$ は定理で得られた方程式系(KGS) の一意解である．

参考文献

[1] T. Ozawa and Y. Tsutsumi, *Asymptotic behavior of solutions for the coupled Klein-Gordon-Schrödinger equations*, preprint, RIMS-775 (1991); Adv. Stud. Pure Math., **23** (1994), 295–305.

[2] A. Shimomura, *Wave operators for the coupled Klein-Gordon-Schrödinger equations in two space dimensions*, To appear in Funkcial. Ekvac.

[3] A. Shimomura, *Modified wave operators for the coupled Wave-Schrödinger equations in three space dimensions*, To appear in Discrete Contin. Dyn. Syst.

[4] A. Shimomura, *Modified wave operators for Maxwell-Schrödinger equations in three space dimensions*, Preprint.

[5] A. Shimomura, *Scattering theory for Zakharov equations in three space dimensions with large data*, Preprint, UTMS 2003-1.

[6] Y. Tsutsumi, *Global existence and asymptotic behavior of solutions for the Maxwell-Schrödinger equations in three space dimensions*, Comm. Math. Phys., **151** (1993), 543–576.