空間１・２次元における非線形シュレディンガー方程式の長距離型散乱について

(学習院大学理学部数学科・下村 明洋氏との共同研究)

日本大学理工学部数学科・利根川 聡

空間 1・2 次元 $(n=1,2)$ における次の非線形シュレディンガー方程式を考える。

$$\text{(NLS)} \qquad iu_t + \frac{1}{2}\triangle u = f_n(u), \quad (t,x) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n.$$

ここで $u=u(t,x)$ は複素数値関数、f_n は以下の形の非線形項である。

$$\text{(1)} \qquad f_1(u) = \lambda_0 |u|^2 u + \lambda_1 u^3 + \lambda_2 u \bar{u}^2 + \lambda_3 \bar{u}^3,$$

$$\text{(2)} \qquad f_2(u) = \lambda_0 |u| u + \lambda_1 u^2 + \lambda_2 \bar{u}^2.$$

ただし $\lambda_0 \in \mathbf{R},\ \lambda_i \in \mathbf{C}\ (i \neq 0)$ とする。以上の f_n がそれぞれ、空間 1・2 次元における臨界冪 $(p = 1+2/n)$ の非線形項であることに注意する。

(NLS) に対する波動作用素、修正波動作用素の存在に関するこれまでの研究は、非線形項がゲージ不変な項だけから成る場合、もしくはゲージ不変でない項だけから成る場合に限られていた。現在知られている結果としてはたとえば、(1),(2) の f_n において $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$ とした場合の修正波動作用素の存在 [1],[3]、$\lambda_0=0$ とした場合の波動作用素の存在 [2] などがある。これらの結果は、臨界冪の非線形項のうちゲージ不変な項は "長距離型" であること、およびそれ以外の項は "短距離型" であることを示している。今回我々が証明したのは、ゲージ不変な項とゲージ不変でない項の両方を含む非線形項 $f_n(u)$ を持つ (NLS) に対し修正波動作用素が存在すること、すなわち非線形項 $f_n(u)$ が長距離型であるということである。

定理の記述およびその後の説明で必要になる記号等を列挙する。

$$\begin{aligned} H^{s,m} &= \Big\{ u \in \mathcal{S}' \;\Big|\; \|u\|_{H^{s,m}} := \|(1+|x|^2)^{m/2}(1-\triangle)^{s/2}u\|_{L^2} < \infty \Big\}, \\ \dot{H}^s &= \Big\{ u \in \mathcal{S}' \;\Big|\; \|u\|_{\dot{H}^s} := \|(-\triangle)^{s/2}u\|_{L^2} < \infty \Big\}, \end{aligned}$$

$$U(t) = e^{it\triangle/2}, \qquad \mathcal{L} = i\partial_t + \frac{1}{2}\triangle, \qquad S_n(t,\xi) = \lambda_0 |\widehat{\phi}(\xi)|^{2/n} \log t,$$

$$u_p(t,x) = \Big(U(t) e^{-i|\cdot|^2/2t} e^{-iS_n(t,-i\nabla)} \phi \Big)(x) = \frac{1}{(it)^{n/2}} \widehat{\phi}\Big(\frac{x}{t}\Big) e^{i|x|^2/2t - iS_n(t,x/t)}$$

定理 1　$n=1$ とする。$\phi \in H^{0,3} \cap \dot{H}^{-4}$ とし、$\delta_1 = \|\phi\|_{H^{0,3}} + \|\phi\|_{\dot{H}^{-4}}$ は十分小さいとする。このとき、非線形項 f_1 を持つ (NLS) に対して次を満たす解 u が唯一つ存在する：

$$u \in C([0,\infty); L^2), \quad \sup_{t \geq 1} \Big(t^d \|u(t) - u_p(t)\|_{L^2} \Big) < \infty, \quad \sup_{t \geq 1} \left[t^d \Big(\int_t^\infty \|u(s) - u_p(s)\|_{L^\infty}^4 ds \Big)^{1/4} \right] < \infty.$$

ここで、d は $1/2 < d < 1$ を満たす任意の定数である。

定理 2　$n=2$ とする。$\phi \in H^{0,4} \cap \dot{H}^{-4}, x\phi \in \dot{H}^{-2}$ とし、$\delta_2 = \|\phi\|_{H^{0,3}} + \|\phi\|_{\dot{H}^{-4}} + \|x\phi\|_{\dot{H}^{-2}}$ は十分小さいとする。このとき、非線形項 f_2 を持つ (NLS) に対して次を満たす解 u が唯一つ存在する：

$$u \in C([0,\infty); L^2), \quad \sup_{t \geq 1} \Big(t^d \|u(t) - u_p(t)\|_{L^2} \Big) < \infty, \quad \sup_{t \geq 1} \left[t^d \Big(\int_t^\infty \|u(s) - u_p(s)\|_{L^4}^4 ds \Big)^{1/4} \right] < \infty.$$

ここで、d は $1/2 < d < 1$ を満たす任意の定数である。

注意 1　以上の 2 定理より、修正波動作用素 $W_+ : \phi \mapsto u(0)$ が定義できる。

定理の証明のポイント

A. 非斉次線形シュレディンガー方程式に対する Strichartz 評価

B. 適当な関数に漸近する解の存在証明

C. より精度の高い (NLS) の近似解の構成

A. Strichartz 評価 (たとえば [5] を参照)

補題 1

n : 空間次元

(p, q) : $2/q = n(1/2 - 1/r),\ 2 < q \le \infty$ を満たす実数の組

$(\tilde{p}, \tilde{q})$: $2/\tilde{q} = n(1/2 - 1/\tilde{r}),\ 2 < \tilde{q} \le \infty$ を満たす実数の組

$\tilde{q}',\ \tilde{r}'$: $\tilde{q},\ \tilde{r}$ の共役指数

このとき、$T_0 \in \mathbf{R},\ f \in L_t^{\tilde{q}'}((T_0, \infty); L_x^{\tilde{r}'}(\mathbf{R}^n))$ に対して

$$\left\| \int_{T_0}^{\infty} U(t-s) f(s) ds \right\|_{L_t^q\left((T_0,\infty); L_x^r(\mathbf{R}^n)\right)} \le C \|f\|_{L_t^{\tilde{q}'}\left((T_0,\infty); L_x^{\tilde{r}'}(\mathbf{R}^n)\right)}$$

が成り立つ。ここで C は T_0 に関して一様に有界な定数。

B. 適当な関数に漸近する解の存在証明

関数 A を (NLS) の解の時刻無限大での漸近形の候補とし、$r = \mathcal{L}A - f_n(A)$ とおく。上述の Strichartz 評価を用いて次の補題を証明することができる (空間 1 次元では $(q, r) = (4, \infty),\ (\tilde{q}, \tilde{r}) = (\infty, 2)$、空間 2 次元では $(q, r) = (4, 4),\ (\tilde{q}, \tilde{r}) = (\infty, 2)$ として補題 1 を利用する)。

補題 2

十分小さい定数 δ が存在し、任意の $t \ge 0$ に対して

$$\|A(t)\|_{L^2} \le \delta, \quad \|A(t)\|_{L^\infty} \le \delta(1+t)^{-n/2}, \quad \|r(t)\|_{L^2} \le \delta \frac{(\log(2+t))^2}{(1+t)^2}$$

が成り立つと仮定する。このとき、(NLS) の解 u で以下を満たすものがただ一つ存在する：

$$u \in C([0,\infty); L^2), \quad \sup_{t \ge 1} \Big(t^d \|u(t) - A(t)\|_{L^2} \Big) < \infty, \quad \sup_{t \ge 1} \left[t^d \Big(\int_t^\infty \|u(s) - A(s)\|_{X_n}^4 ds \Big)^{1/4} \right] < \infty,$$

ここで、$X_1 = L^\infty,\ X_2 = L^4$ とし、d は $1/2 < d < 1$ を満たす任意の定数である。

補題 2 の証明の概略

$w = u - A$ とおくと、u が (NLS) を満たすことは w が (NLS$'$) $\mathcal{L}w = f_n(w + A) - f_n(A) - r$ を満たすことと同値になる。(NLS$'$) を積分方程式に書き改めると

$$w(t) = i \int_t^\infty U(t-s) \Big\{ f_n(w(s) + A(s)) - f_n(A(s)) - r(s) \Big\} ds$$

となる。これの右辺を $(\Gamma w)(t)$ とおくと、補題 2 の仮定のもと Γ が関数空間

$$X = \left\{ w \in C([0,\infty); L^2) \,\middle|\, \|w\|_X := \sup_{t \ge 0} \left[(1+t)^d \Big\{ \|w(t)\|_{L^2} + \Big(\int_t^\infty \|w(s)\|_{X_n}^4 ds \Big)^{1/4} \Big\} \right] < \infty \right\}$$

のある閉球上、縮小写像になることが証明される。

C. 近似解の構成

関数 u_p に対して $\|\mathcal{L}u_p(t)-\lambda_0|u_p(t)|^{2/n}u_p(t)\|_{L^2} \le C\delta_n \frac{(\log(2+t))^2}{(1+t)^2}$ が成り立つ。これより、$f_n(u)$ の係数のうち少なくとも 1 つの λ_i $(i \neq 0)$ が 0 でない場合 $\|\mathcal{L}u_p(t)-f_n(u_p(t))\|_{L^2} = O(t^{-1})$ となることが分かる。従って、$A = u_p$ とするだけでは補題 2 が利用できない。

以下、u_p に比べ速く減衰する関数 u_r で $\varepsilon(t) := \|\mathcal{L}u_r(t)-(f_n(u_p(t))-\lambda_0|u_p(t)|^{2/n}u_p(t))\|_{L^2}$ が t について可積分になるようなものを構成する。ここでは、簡単のため係数 λ_i $(i \neq 0)$ のうち 0 でないものはただ一つであるとする。すなわち $f_n(u) = \lambda_0|u|^{2/n}u+\lambda u^l\bar{u}^m$ とする。このとき、$a = l-m,\ p = l+m = 1+2/n,\ \psi = \phi^l\bar{\phi}^m,\ \theta = a|x|^2/2t - aS_n(t,x/t)$ とおくと $f_n(u_p)-\lambda_0|u_p|^{2/n}u_p = \frac{\lambda i^{-na/2}}{t^{np/2}}\psi\Big(\frac{x}{t}\Big)e^{i\theta}$ と書ける。そこで、$u_r(t,x) = \frac{1}{t^b}P\Big(\frac{x}{t}\Big)e^{i\theta}$ とおき、$\varepsilon(t)$ が可積分になるような定数 b と関数 P を探す。$\mathcal{L}u_r$ に現れる項を減衰の遅い方から順に書き出すと

$$\mathcal{L}u_r = \frac{1}{t^b}\frac{a(1-a)}{2}\frac{|x|^2}{t^2}P\Big(\frac{x}{t}\Big)e^{i\theta} + \frac{\log t}{t^{b+1}}\cdot a(a-1)\lambda_0\frac{x}{t}\cdot(\nabla|\hat{\phi}|^{2/n})\Big(\frac{x}{t}\Big)P\Big(\frac{x}{t}\Big)e^{i\theta}+\cdots$$

となるので、$b = \frac{np}{2} = 1+\frac{n}{2},\ P(y) = \frac{2\lambda i^{-na/2}}{a(1-a)}\frac{1}{|y|^2}\psi(y)$ とおけば ϕ に関する定理の仮定のもと

$$\varepsilon(t) = \left\|\frac{\log t}{t^{b+1}}\cdot a(a-1)\lambda_0\frac{x}{t}\cdot(\nabla|\hat{\phi}|^{2/n})\Big(\frac{x}{t}\Big)P\Big(\frac{x}{t}\Big)e^{i\theta}+\cdots\right\|_{L^2} \le C\delta_n\frac{\log t}{t^2}$$

が成り立つ。

以上により得られた u_r を用いて $A = u_p+u_r$ とおく。このとき、A が補題 2 の仮定を満たすことは容易に確かめられる。r についても

$$r = \Big\{\mathcal{L}u_p-\lambda_0|u_p|^{2/n}u_p\Big\}+\Big\{\mathcal{L}u_r-\Big(f_n(u_p)-\lambda_0|u_p|^{2/n}u_p\Big)\Big\}+\Big\{f_n(u_p)-f_n(u_p+u_r)\Big\}$$

と書き直すことで補題 2 の仮定を満たすことが確かめられる。

注意 2 P に $1/|y|^2$ という因子が現れることが $\phi \in \dot{H}^{-s}$ という仮定を必要とした理由である。また、P の分母に $a(1-a)$ という項があることが、f_2 に $u\bar{u}$ という項 (この項に対して $a=0$ である) を含めることができなかった理由である。

注意 3 以上に述べた漸近解の近似関数の構成法は、シュレディンガー方程式と 2 階の双曲型方程式の連立系に対する散乱問題にも適用可能である。(たとえば [4] を参照)

参考文献

[1] J.Ginibre and T.Ozawa, *Long range scattering for nonlinear Schrödinger and Hartree equations in space dimension* $n \ge 2$, Commun. Math. Phys., **151** (1993), 619-645.

[2] K.Moriyama, S.Tonegawa and Y.Tsutsumi, *Wave operators for the nonlinear Schrödinger equations with a nonlinearity of low degree in one or two space dimensions*, to appear in Comm. Contemp. Math.

[3] T.Ozawa, *Long range scattering for nonlinear Schrödinger equations in one space dimension*, Commun. Math. Phys., **139**(1991), 479-493.

[4] A.Shimomura, *Modified wave operators for the coupled Wave-Schrödinger equations in three space dimensions*, to appear in Discrete Contin. Dyn. Syst.

[5] K.Yajima, *Existence of solutions for Schrödinger evolution equations*, Commun. Math. Phys., **110** (1987), 415-426.