

複素 Ginzburg-Landau 方程式の解の一意性と粘性消滅極限*

横田 智巳 (東京理科大学・理学部)

yokota@rs.kagu.tus.ac.jp

2003/5/24

Ω は $\mathbb{R}^2$ の領域とする. 次の複素 Ginzburg-Landau 方程式の初期値境界値問題の弱解の一意性と粘性消滅極限 (inviscid limit) について議論する:

$$(CGL) \quad \begin{cases} \partial_t u - (\lambda + i\alpha)\Delta u + (\kappa + i\beta)|u|^{p-1}u - \gamma u = 0, & t > 0, \quad x \in \Omega, \\ u(t, x) = 0, & t > 0, \quad x \in \partial\Omega, \\ u(0, x) = u_0(x), & t = 0, \quad x \in \Omega. \end{cases}$$

ここで $p > 1$, $\lambda \geq 0$, $\kappa, \alpha, \beta, \gamma$ は実定数とする. 通常, 複素 Ginzburg-Landau 方程式というときには, $\lambda > 0$ かつ $\kappa > 0$ が仮定されるが (cf. Temam [7]), ここでは (CGL) を $\lambda = 0$ を含む場合まで考える. $\Omega = \mathbb{R}^n$ の場合には Ginibre-Velo [2], [3] が $\lambda > 0$ かつ $\kappa > 0$ に対する (CGL) の時間大域的適切性を示していて, この場合 $p < \infty$ ($n = 1, 2$) あるいは $p \leq (n+2)/(n-2)$ ($n \geq 3$) で係数にはほとんど制限が加えられていない. 彼らは

$$(1) \quad |\beta| \leq \frac{2\sqrt{p}}{p-1}\kappa$$

の仮定の下でも弱解の一意性を証明している. 同様の結果は $\mathbb{R}^n$ における一般領域 Ω 上での初期値境界値問題 (CGL) に対しても成立する (Okazawa-Y. [6]). しかしながら (1) の制限なしでは一般領域上での (CGL) に対する一意性の結果は ($u_0 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$ の場合を除いて) 知られていないようである. ここでは $n = 2$, $p \leq 3$ の制限の下, (1) の条件を課さずに一意性を示す. 物理的には $n = 2$, $p = 3$ の場合が具体的な model に対応していることに注意する.

初期値 $u_0 \in L^2(\Omega)$ に対して u が (CGL) の弱解であるとは $u \in C([0, T]; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap L^{p+1}(0, T; L^{p+1}(\Omega))$ なる関数 u が超関数の意味で (CGL) を満たすことである. $p \leq 3$ のとき (CGL) の弱解の存在は standard な方法で示される. 一意性に関して以下の定理を得た.

Theorem 1. $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ を (必ずしも有界でない) 領域とし, $\lambda > 0$, $\kappa \geq 0$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, $1 < p \leq 3$ とする. このとき $u_0 \in L^2(\Omega)$ に対して (CGL) の時間大域的弱解 $u \in C([0, \infty); L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap L^{p+1}(0, T; L^{p+1}(\Omega))$ は一意である.

注意. 上の定理は n 次元の場合へ拡張可能であるが, 詳細については講演で説明する.

*本研究は九州大学の小川卓克助教授との共同研究である.

Theorem 2. $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ を (必ずしも有界でない) 領域とし, $\lambda \geq 0, 1 < p \leq 3$ とする.

- (i-a) $\kappa \geq 0$ かつ $\alpha\beta \geq 0$ ($\alpha \neq 0$) のとき, $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ に対して (CGL) の時間大域的弱解 $u \in C([0, \infty); H_0^1(\Omega))$ は一意である.
- (i-b) $\kappa \geq 0$ かつ $\alpha\beta < 0$ のとき, $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ に対してある $T^* > 0$ があって (CGL) の時間局所的弱解 $u \in C([0, T^*]; H_0^1(\Omega))$ が存在するがそれは一意である. (もし “ $\lambda > 0$ ” あるいは “ $p = 3$ で $\|u_0\|_2$ が十分小さい” ならば $T^* = \infty$ と取れる)
- (ii) $\kappa < 0$ のとき, (CGL) の時間局所的弱解 $u \in C([0, T^*]; H_0^1(\Omega))$ は一意である.

次に (CGL) に対する粘性消滅極限 (inviscid limit) を考える. (CGL) で $\lambda = 0$ とすれば, それは以下のような非線形 Schrödinger 方程式となる:

$$(NLS1) \quad \begin{cases} i\partial_t v + \alpha\Delta v = (\beta - i\kappa)|v|^{p-1}v + i\gamma v, & t > 0, \quad x \in \Omega, \\ v(t, x) = 0, & t > 0, \quad x \in \partial\Omega, \\ v(0, x) = u_0(x), & t = 0, \quad x \in \Omega. \end{cases}$$

さらに $\kappa = 0$ とすれば

$$(NLS2) \quad \begin{cases} i\partial_t w + \alpha\Delta w = \beta|w|^{p-1}w + i\gamma w, & t > 0, \quad x \in \Omega, \\ w(t, x) = 0, & t > 0, \quad x \in \partial\Omega, \\ w(0, x) = u_0(x), & t = 0, \quad x \in \Omega \end{cases}$$

となる. $\Omega = \mathbb{R}^n$ の場合, Wu [8] は (1) の条件下で, $\lambda \rightarrow 0$ かつ $\kappa \rightarrow 0$ のとき (CGL) の解 u が (NLS2) の解 w に収束することを示し, その収束の order を求めた (cf. Machihara-Nakamura [4]). Bechouche-Jüngel [1] は全空間 $\mathbb{R}^n$ あるいはトーラス $\mathbb{T}^n$ の場合に (1) を仮定せずに同様の問題を考えた. しかしながら [1] ではその証明において Sobolev の埋め込み $H^m(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$ が本質的に使われているため, $n = 2$ では $u_0 \in H^2(\Omega)$ が仮定されている. ここでは $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ に対する一般領域 Ω 上での初期値境界値問題 (CGL) に対して (1) を仮定せずに以下の粘性消滅極限に関する定理を得た.

Theorem 3. $\Omega \subset \mathbb{R}^2, 1 < p \leq 3$ とし, u, v, w をそれぞれ同一の初期値 $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ を持つ初期値境界値問題 (CGL), (NLS1), (NLS2) の一意弱解とする.

- (i-a) $\kappa \geq 0$ かつ $\alpha\beta \geq 0$ ($\alpha \neq 0$) のとき, 任意の $T > 0$ と $2 \leq q < \infty$ に対して以下が成立する.

$$(2) \quad \begin{aligned} & \sup_{t \in [0, T]} \|u(t) - v(t)\|_q \rightarrow 0 \quad (\lambda \rightarrow 0), \\ & \sup_{t \in [0, T]} \|u(t) - w(t)\|_q \rightarrow 0 \quad (\lambda \rightarrow 0, \kappa \rightarrow 0). \end{aligned}$$

- (i-b) $\kappa \geq 0$ かつ $\alpha\beta < 0$ のとき ($p = 3$ のときには $\|u_0\|_2$ が十分小さいとする), $\kappa/\lambda^{(p-1)/2}$ が有界ならば, 任意の $T > 0$ と $2 \leq q < \infty$ に対して (2) が成立する.
- (ii) $\kappa < 0$ のとき ($p = 3$ のときには $\|u_0\|_2$ が十分小さいとする), $|\kappa|/\lambda^{(p+1)/4}$ が有界ならば, 任意の $0 < T < T^*$ かつ $2 \leq q < \infty$ に対して (2) が成立する.

References

- [1] P. Bechouche, A. Jüngel, Inviscid limits of the complex Ginzburg-Landau equation, *Comm. Math. Phys.*, **214** (2000), 201–226.
- [2] J. Ginibre, G. Velo, The Cauchy problem in local spaces for the complex Ginzburg-Landau equation I, Compactness methods, *Physica D*, **95** (1996), 191–228.
- [3] J. Ginibre, G. Velo, The Cauchy problem in local spaces for the complex Ginzburg-Landau equation II, Contraction methods, *Comm. Math. Phys.*, **187** (1997), 45–79.
- [4] S. Machihara, Y. Nakamura, The inviscid limit for the complex Ginzburg-Landau equation, *J. Math. Anal. Appl.*, to appear.
- [5] T. Ogawa, A proof of Trudinger’s inequality and its application to nonlinear Schrödinger equations, *Nonlinear Anal.*, **14** (1990), 765–769.
- [6] N. Okazawa, T. Yokota, Global existence and smoothing effect for the complex Ginzburg-Landau equation with p -Laplacian, *J. Differential Equations*, **182** (2002), 541–576.
- [7] R. Temam, Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics, Applied Math. Sci., vol. 68, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1988; 2nd ed., 1997.
- [8] J. Wu, The inviscid limit of the complex Ginzburg-Landau equation, *J. Differential Equations*, **142** (1998), 413–433.