定磁場のある 2 次元空間内での 3 体Schrödinger 作用素に対する Mourre 評価について

足立 匡義（神戸大学理学部）

1　序

この講演では、定磁場 $\boldsymbol{B} = (0, 0, B) \in \boldsymbol{R}^3$, $B > 0$ に直交する平面内を運動する 3 体量子力学系を支配するハミルトニアンに対する Mourre 評価を取り扱う。考える系は 2 個の荷電粒子と 1 個の非荷電粒子からなるものとする。$j = 1, 2, 3$ に対して、$m_j > 0$, $q_j \in \boldsymbol{R}$, $y_j \in \boldsymbol{R}^2$ をそれぞれ j 番目の粒子の質量、電荷、位置ベクトルとする。

$$q_1 = 0, \quad q_2, q_3 \neq 0 \tag{1.1}$$

を仮定し、更に系の全電荷 $q = q_2 + q_3$ が 0 でないとする：

$$q \neq 0. \tag{1.2}$$

この仮定は重要である。

系を支配する全ハミルトニアンは $L^2(\boldsymbol{R}^{2\times 3})$ 上の作用素として

$$H = \frac{1}{2m_1} {D_{y_1}}^2 + \left(\sum_{j=2}^{3} \frac{1}{2m_j} (D_{y_j} - q_j \boldsymbol{A}(y_j))^2 \right) + V \tag{1.3}$$

で定義される。但し、V は相互作用ポテンシャル $V_{jk}(y_j - y_k)$ の和である：

$$V = \sum_{1 \leq j < k \leq 3} V_{jk}(y_j - y_k).$$

また、$D_{y_j} = -i\nabla_{y_j}$ は j 番目の粒子の運動量で、$\boldsymbol{A}(r)$ はベクトルポテンシャルである：

$$\boldsymbol{A}(r) = \frac{B}{2}(-r_2, r_1), \quad r = (r_1, r_2).$$

定磁場内でのハミルトニアンを考察する上で重要な、系の全擬運動量 k_{total} は

$$k_{\mathrm{total}} = D_{y_1} + \left(\sum_{j=2}^{3} (D_{y_j} + q_j \boldsymbol{A}(y_j)) \right) \tag{1.4}$$

で定義される。H から k_{total} の依存性を取り除くことを考える：k_{total} は H と可換である。$q \neq 0$ であることに注意して、$L^2(\boldsymbol{R}^{2\times 3})$ 上のユニタリー作用素

$$U = e^{-iy_{\mathrm{cm}} \cdot q\boldsymbol{A}(y_{\mathrm{cc}})} e^{iqBy_{\mathrm{cm},1}y_{\mathrm{cm},2}/2} e^{iD_{y_{\mathrm{cm},1}} D_{y_{\mathrm{cm},2}}/(qB)} \tag{1.5}$$

を導入する。但し、

$$y_{\mathrm{cm}} = \frac{1}{M}\sum_{j=1}^{3} m_j y_j, \quad y_{\mathrm{cc}} = \frac{1}{q}\sum_{j=1}^{3} q_j y_j, \tag{1.6}$$

はそれぞれ系の重心、電荷中心であり、$M = \sum_{j=1}^{3} m_j$ は系の全質量である。このとき、

$$U^* k_{\mathrm{total},1} U = D_{y_{\mathrm{cm},1}}, \quad U^* k_{\mathrm{total},2} U = qBy_{\mathrm{cm},1} \tag{1.7}$$

となり、U^*HU は $(D_{y_{\mathrm{cm},1}}, qBy_{\mathrm{cm},1})$ に依存しないことがわかる。ここで、$k_{\mathrm{total}} = (k_{\mathrm{total},1}, k_{\mathrm{total},2})$, $y_{\mathrm{cm}} = (y_{\mathrm{cm},1}, y_{\mathrm{cm},2})$, $D_{y_{\mathrm{cm}}} = (D_{y_{\mathrm{cm},1}}, D_{y_{\mathrm{cm},2}})$ と表すことにする。このとき、$U^*L^2(\boldsymbol{R}^{2\times 3})$ 上のハミルトニアン U^*HU は $\mathcal{H} = L^2(Y^{a_{\max}} \times \boldsymbol{R}_{y_{\mathrm{cm},2}})$ 上の作用素と同一視される。但し、$Y^{a_{\max}}$ は重心座標系の配位空間で、

$$Y^{a_{\max}} = \left\{ y = (y_1, y_2, y_3) \in \boldsymbol{R}^{2\times 3} \;\middle|\; \sum_{j=1}^{3} m_j y_j = 0 \right\}$$

によって定義される。$Y^{a_{\max}}$ には計量

$$\langle y, \bar{y} \rangle = \sum_{j=1}^{3} m_j y_j \cdot \bar{y}_j, \quad |y|_1 = \sqrt{\langle y, y \rangle}$$

が備えられている。このような同一視で得られる $\mathcal{H}$ 上の作用素を $\hat{H}$ で表すことにする。$\hat{H}$ に対するスペクトル理論の考察を行うのが目的である。

相互作用ポテンシャル V_{jk} についての仮定を述べる。

(V) $V_{23} = V_{23}(r) \in C^\infty(\boldsymbol{R}^2)$ は実数値関数で

$$|\partial_r^\alpha V_{23}(r)| \le C_\alpha \langle r \rangle^{-\mu - |\alpha|}$$

をある $\mu > 0$ に対して満たしている。$q_2 > 0$ かつ $q_3 < 0$ のとき、$V_{12}(r)$ は実数値関数で $C_0^\infty(\boldsymbol{R}^2)$ に属し、$V_{13}(r)$ は恒等的に 0 である。$q_2 > 0$ かつ $q_3 > 0$ のとき、$V_{12}(r)$, $V_{13}(r)$ は実数値関数で $C_0^\infty(\boldsymbol{R}^2)$ に属している。

注意 非荷電粒子と荷電粒子との間の相互作用ポテンシャルが有限距離型であることを仮定しているが、核力のようなものを想定しているので、それほど奇妙ではないと思われる。V_{23} について、$|r|^{-\mu_0}$, $0 < \mu_0 < 1$, のような特異性は許される。

この講演での主結果は次の通りである。

定理 1.1. V は条件 (V) を満たしているとする。$\lambda \ge \inf \Theta$ に対して

$$d(\lambda) = \mathrm{dist}(\lambda, \Theta \cap (-\infty, \lambda])$$

とおく。但し、Θ は $\hat{H}$ の閾値の集合である。$\lambda \ge \inf \Theta$, $\varepsilon > 0$ とする。このとき、$\hat{H}$ に対する *conjugate operator* $\hat{A}$ が存在する：$(\lambda - \delta, \lambda + \delta)$ に台をもつ実数値関数 $f \in C_0^\infty(\boldsymbol{R})$ に対して、$\mathcal{H}$ 上のコンパクト作用素 K が存在して、

$$f(\hat{H}) i[\hat{H}, \hat{A}] f(\hat{H}) \ge 2(d(\lambda) - \varepsilon) f(\hat{H})^2 + K \tag{1.8}$$

が成立するような $\delta > 0$ が存在する。

$\hat{H}$ の固有値は Θ にのみ集積し得る。$\Theta \cup \sigma_{\mathrm{pp}}(\hat{H})$ は可算閉集合である。