

回帰的 Banach 空間に於ける 非線形発展方程式について

On Nonlinear Evolution Equations in Reflexive Banach Spaces

赤木 剛朗

(Goro AKAGI),

早稲田大学・メディアネットワークセンター

goro@toki.waseda.jp

Oct. 23, 2004

1 講演の目的

この講演では、回帰的 Banach 空間 V とその共役空間 V^* 上で定義される劣微分作用素 $\partial_{V,V^*}\varphi : V \rightarrow 2^{V^*}$ を含む非線形発展方程式の研究について話す。タイトルにあるように、この研究は抽象発展方程式を対象とするが、研究の方針は具体的な非線形偏微分方程式に対する解析法に基づいている。

そこで、ある準線形放物型方程式に対する応用性という視点から：

- ・なぜ、このようなフレームワークを導入したか？
- ・このフレームワークには、どのようなメリットとデメリットがあるのか？

について説明する。

2 劣微分作用素の定義・性質

講演時の reference として、劣微分作用素の概念やその性質の幾つかをここにまとめておく。

劣微分作用素を定義する前に、回帰的 Banach 空間 X 上で定義される下半連続凸関数の集合を次のように表すことにする。

$$\Phi(X) := \{\phi : X \rightarrow (-\infty, +\infty]; \phi \text{ は } X \text{ 上で下半連続凸, かつ } \phi \not\equiv +\infty\}.$$

ここで、汎関数 $\phi \in \Phi(X)$ の劣微分作用素 $\partial_{X,X^*}\phi : X \rightarrow 2^{X^*}$ は以下のように定義される。

定義 2.1 汎関数 $\phi \in \Phi(X)$ の有効領域 (effective domain) $D(\phi)$ と, $u \in D(\phi)$ に於ける劣微分 (subdifferential) $\partial_{X,X^*}\phi(u)$ は次のように定義される.

$$\begin{aligned} D(\phi) &:= \{u \in X; \phi(u) < +\infty\}, \\ \partial_{X,X^*}\phi(u) &:= \{\xi \in X^*; \phi(v) - \phi(u) \geq \langle \xi, v - u \rangle_X \quad \forall v \in D(\phi)\}. \end{aligned}$$

更に ϕ の劣微分作用素 $\partial_{X,X^*}\phi : X \rightarrow 2^{X^*}$ が, $D(\partial_{X,X^*}\phi) := \{u \in D(\phi); \partial_{X,X^*}\phi(u) \neq \emptyset\}$ をドメインとして定義される.

記述を簡単にするために, 以下では $\partial_{X,X^*}\phi$ を $\partial_X\phi$ と略記する.

注意 2.2 (1) 劣微分は, 凸関数に対する Fréchet 微分の拡張概念である. Fréchet 微分可能な凸関数の劣微分は, その Fréchet 微分に一致する.

- (2) 上の定義では $\partial_X\phi(u)$ は一般に集合となるため, 劣微分作用素は X から X^* への多価作用素となる (そのため $\partial_X\phi : X \rightarrow 2^{X^*}$ と記述している).
- (3) 劣微分作用素 $\partial_X\phi$ は, 極大単調作用素になる. そのため, 吉田近似やレゾルベントといった性質の良い近似をとることができる (命題 2.3 参照). また, 近似の収束等を考える際には, demiclosedness などのグラフの閉性 (命題 2.6 参照) を利用することができる.

なお X が Hilbert 空間 H であり, かつその共役空間 H^* が自身と同一視されている場合 (つまり $X = H \equiv H^*$), $\phi \in \Phi(H)$ の $u \in D(\phi)$ に於ける劣微分 $\partial_H\phi(u)$ は, H の内積 $(\cdot, \cdot)_H$ を用いて, 次のように表すことができる.

$$\partial_H\phi(u) := \{\xi \in H; \phi(v) - \phi(u) \geq (\xi, v - u)_H \quad \forall v \in D(\phi)\}.$$

従って, ϕ の劣微分作用素 $\partial_H\phi$ は H から 2^H への作用素と見ることができる. また注意 2.2 の (3) より, $\partial_H\phi$ は H 上の極大単調作用素になる.

Hilbert 空間 H 上で定義される極大単調作用素 $A : H \rightarrow 2^H$ の吉田近似 $A_\lambda : H \rightarrow H$ とレゾルベント $J_\lambda : H \rightarrow D(A)$ は次のように定義される.

$$J_\lambda := (I + \lambda A)^{-1}, \quad A_\lambda := \frac{I - J_\lambda}{\lambda} \quad \forall \lambda > 0.$$

ただし I は H 上の恒等写像を表す. さらに J_λ と A_λ は, 次の性質を持つ.

命題 2.3 (1) J_λ は H 上で non-expansive (つまり $|J_\lambda u - J_\lambda v|_H \leq |u - v|_H \quad \forall u, v \in H$), また A_λ は H 上で Lipschitz 連続 (Lipschitz 定数は $2/\lambda$).

(2) $A_\lambda u \in A(J_\lambda u) \quad \forall u \in H.$

(3) $u \in \overline{D(A)}^H$ に対して, $J_\lambda u \rightarrow u$ strongly in H as $\lambda \rightarrow +0$.

(4) $u \in D(A)$ に対して,

$$A_\lambda u \rightarrow A^\circ u \text{ strongly in } H \text{ かつ } |A_\lambda u|_H \leq |A^\circ u|_H = \min\{|\xi|_H; \xi \in Au\}.$$

ただし, $A^\circ u$ は H -ノルムを最小にする Au の元 ($A^\circ u$ はいつも一意に存在する).

また $A = \partial_H \phi$ の場合は、次のように与えられる $\phi \in \Phi(H)$ の Moreau-吉田正則化 ϕ_λ の劣微分 (Fréchet 微分) が、 A の吉田近似と一致する。

$$\phi_\lambda(u) := \inf_{v \in H} \left\{ \frac{1}{2\lambda} |u - v|_H^2 + \phi(v) \right\} \quad \forall u \in H.$$

命題 2.4 (1) $\phi_\lambda \in \Phi(H)$, $\phi(u) < +\infty \ \forall u \in H$, かつ ϕ_λ は H 上で Fréchet 微分可能.

(2) $(\partial_H \phi)_\lambda = \partial_H(\phi_\lambda)$.

(3) ϕ_λ の定義に現れる下限は、 $v = J_\lambda u$ で到達する. つまり,

$$\phi_\lambda(u) = \frac{1}{2\lambda} |u - J_\lambda u|_H^2 + \phi(J_\lambda u) \quad \forall u \in H.$$

(4) $\phi(J_\lambda u) \leq \phi_\lambda(u) \leq \phi(u) \quad \forall u \in H$.

また、発展方程式では次のような劣微分作用素の連鎖律が役に立つ.

命題 2.5 $\phi \in \Phi(X)$ とし、 $u \in W^{1,p}(0, T; X)$ とする. $(0, T)$ 上ほとんど至る所で $g(t) \in \partial_X \phi(u(t))$ となる $g \in L^{p'}(0, T; X^*)$ が少なくとも一つ存在する時、 $t \mapsto \phi(u(t))$ は $(0, T)$ 上ほとんど至る所で微分可能である. さらに次の連鎖律が成立する:

$$\frac{d}{dt} \phi(u(t)) = \left\langle h(t), \frac{du}{dt}(t) \right\rangle_X \quad \forall h(t) \in \partial_X \phi(u(t)), \text{ for a.e. } t \in (0, T).$$

発展方程式では、極大単調作用素 $A : X \rightarrow 2^{X^*}$ を、次のような $\mathcal{X} := L^p(0, T; X)$ から $\mathcal{X}^* = L^{p'}(0, T; X^*)$ への作用素 $\mathcal{A}$ として、拡張することがある.

$$Au \ni f \quad \Leftrightarrow \quad Au(t) \ni f(t) \quad \text{for a.e. } t \in (0, T).$$

汎関数 $\phi \in \Phi(X)$ の劣微分作用素 $\partial_X \phi$ も、同様に拡張できる. 一方、汎関数 $\Psi \in \Phi(\mathcal{X})$ を次のように定義すると

$$\Psi(u) := \begin{cases} \int_0^T \phi(u(t)) dt & \text{if } \phi(u(\cdot)) \in L^1(0, T), \\ +\infty & \text{otherwise,} \end{cases}$$

劣微分作用素 $\partial_{\mathcal{X}} \Psi : \mathcal{X} \rightarrow 2^{\mathcal{X}^*}$ は先に定義した $\partial_X \phi$ の拡張に一致する. つまり,

$$\partial_{\mathcal{X}} \Psi(u) \ni f \quad \Leftrightarrow \quad \partial_X \phi(u(t)) \ni f(t) \quad \text{for a.e. } t \in (0, T).$$

最後に、極大単調作用素 $A : X \rightarrow X^*$ のグラフの閉性について述べる. 以下では、作用素 A のグラフも同じ記号 A で表すことにする.

命題 2.6 $[u_n, \xi_n] \in A$ が以下を満たすとする.

$$\begin{aligned} u_n &\rightarrow u \text{ weakly in } X, \\ \xi_n &\rightarrow \xi \text{ weakly in } X^*, \\ \limsup_{n \rightarrow +\infty} \langle \xi_n, u_n \rangle_X &\leq \langle \xi, u \rangle_X. \end{aligned}$$

この時, $[u, \xi] \in A$ かつ $\langle \xi_n, u_n \rangle_X \rightarrow \langle \xi, u \rangle_X$.

3 準線形放物型方程式と回帰的 Banach 空間上の発展方程式

この講演では, 回帰的 Banach 空間 V とその共役空間 V^* 上で定義される劣微分作用素 $\partial_V \phi : V \rightarrow 2^{V^*}$ を含む非線形発展方程式のフレームワークの有効性を説明するために, 以下の二つの準線形放物型方程式を取り上げる.

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \Delta_p u(x, t) - |u|^{q-2}u(x, t) = f(x, t), \quad x \in \Omega, \quad t > 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}|u|^{m-2}u(x, t) - \Delta_p u(x, t) = f(x, t), \quad x \in \Omega, \quad t > 0. \quad (2)$$

ただし $1 < q, m < +\infty$, Ω は滑らかな境界を持つ $\mathbf{R}^N$ の有界領域とし, Δ_p は p -Laplacian と呼ばれる微分作用素で, 次のように定義される:

$$\Delta_p v(x) = \nabla \cdot (|\nabla v(x)|^{p-2} \nabla v(x)), \quad 1 < p < +\infty.$$

また $f : \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbf{R}$ は与えられた関数とする. これらの方程式に Dirichlet 境界条件 (3), 及び, 初期条件 (4) を課して初期値境界値問題を考える.

$$u(x, t) = 0, \quad x \in \Omega, \quad t > 0, \quad (3)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega. \quad (4)$$

このような準線形放物型方程式の解析では, それぞれの非線形性に応じた弱解の概念を導入することが肝要である. Hilbert 空間上の劣微分作用素を含んだ発展方程式による (1) や (2) へのアプローチでは, $H := L^2(\Omega)$ 上で定義された次の汎関数 $\varphi_{p,H}$, $\psi_{q,H}$ を導入する.

$$\varphi_p(u) = \frac{1}{p} \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^p dx \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega), \quad \psi_q(u) = \frac{1}{q} \int_{\Omega} |u(x)|^q dx \quad \forall u \in L^q(\Omega),$$

$$\varphi_{p,H}(u) = \begin{cases} \varphi_p(u) & \text{if } u \in W_0^{1,p}(\Omega), \\ +\infty & \text{otherwise,} \end{cases} \quad \psi_{q,H}(u) = \begin{cases} \psi_q(u) & \text{if } u \in L^q(\Omega), \\ +\infty & \text{otherwise.} \end{cases}$$

そして, $\varphi_{p,H}$ と $\psi_{q,H}$ の劣微分 $\partial_H \varphi_{p,H}(u)$, $\partial_H \psi_{q,H}(u)$ は, それぞれ Dirichlet 境界条件 (3) を伴う $-\Delta_p u$ と $|u|^{q-2}u$ に超関数の意味で一致する. 従って (1) と (2) の初期値境界値問題は, 次の $H = L^2(\Omega)$ 上の発展方程式の Cauchy 問題に書き換えられる.

$$\frac{du}{dt}(t) + \partial_H \varphi_{p,H}(u(t)) - \partial_H \psi_{q,H}(u(t)) = f(t) \text{ in } H, \quad 0 < t < T, \quad u(0) = u_0, \quad (5)$$

$$\frac{d}{dt} \partial_H \psi_{m,H}(u(t)) + \partial_H \varphi_{p,H}(u(t)) = f(t) \text{ in } H, \quad 0 < t < T, \quad u(0) = u_0. \quad (6)$$

Hilbert 空間上の劣微分作用素を含む発展方程式の研究は H. Brézis にはじまり, 多くの数学者によって研究されている. 中でも 石井 [3], 大谷 [4] は, (5) の時間局所・大域解の存在に対する十分条件を求めることに成功している. 彼らによって得られた, 初期値 $u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ に対する (1) の初期値境界値問題の強解¹ の存在に対する十分条件は, 以下の通り (ただし, p^* は Sobolev の埋蔵定理 $W^{1,p}(\Omega) \subset L^s(\Omega)$ に現れる臨界指数²とする):

	$p < q$	$p > q$
時間局所解	$q < \frac{1}{2}p^* + 1$	いつも
時間大域解	$q < \frac{1}{2}p^* + 1$ u_0, f : 十分小	いつも

一方, 堤 [5] は Sobolev の意味の劣臨界条件 $q < p^*$ の下で, Galerkin 法を用いて, 十分小さい u_0, f に対する (1) の初期値境界値問題の時間大域的な弱解³ の存在を証明している. よって, 劣臨界条件の下で時間局所的な弱解の存在が予想される. 実際, 大谷 [4] は $p = 2$ の場合⁴にこの予想が正しいことを証明している. しかし, $p \neq 2$ の場合は, この予想が正しいかどうか, 長い間, 未解決問題として残されて来た. $p \neq 2$ の場合の弱解の存在については, Hilbert 空間上の発展方程式の理論が方程式を取り扱う空間を Hilbert 空間に制限してしまうため, 弱解に対応した関数空間での情報を十分に用いることができず, 不十分な結果に留まってしまふと考えられる.

さらに (6) に応用可能な Hilbert 空間上の発展方程式の理論は, 未だ見当たらない. これもやはり, 関数空間の選択に関する制限が原因と思われる.

さて, 回帰的 Banach 空間で発展方程式を取り扱う本研究のフレームワークでは, $V := W_0^{1,p}(\Omega)$ とし, V 上で定義された汎関数 φ_p, ψ_m の劣微分⁵ $\partial_V \varphi_p(u), \partial_V \psi_q(u)$ がそれぞれ, (3) を伴う $-\Delta_p u$, 及び, $|u|^{q-2}u$ に超関数の意味で等しくなることに注目する. 話を簡単にするために, 以下では $p \geq 2N/(M+2)$ とする. この時 $V = W_0^{1,p}(\Omega)$ と $H = L^2(\Omega)$ は次の連続な埋め込みを満たす.

$$V \subset H \equiv H^* \subset V^*$$

従って, (1) と (2) の初期値境界値問題は, 以下のような $V^* = W^{-1,p'}(\Omega)$ 上の発展方程式の Cauchy 問題に帰着される.

$$\frac{du}{dt}(t) + \partial_V \varphi_p(u(t)) - \partial_V \psi_q(u(t)) = f(t) \text{ in } V^*, \quad 0 < t < T, \quad u(0) = u_0, \quad (7)$$

$$\frac{d}{dt} \partial_V \psi_m(u(t)) + \partial_V \varphi_p(u(t)) = f(t) \text{ in } V^*, \quad 0 < t < T, \quad u(0) = u_0. \quad (8)$$

最後に, 本研究のフレームワークを用いて得られた, (1) と (2) の解の存在についての結果を述べよう.

¹ここで強解 u とは, $du/dt, \Delta_p u \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ を満たす解を意味する.

²埋め込み $W^{1,p}(\Omega) \subset L^s(\Omega)$ は, $s < p^*$ ならばコンパクトになる. さらに, $s \leq p^*$ の場合は連続になる.

³ここで弱解 u とは, $du/dt \in L^2(0, T; L^2(\Omega)), \Delta_p u, |u|^{q-2}u \in L^\infty(0, T; W^{-1,p'}(\Omega))$ を満たす解を指す.

⁴ Δ_2 は通常の Laplacian のため, (1) は半線形熱方程式になる.

⁵汎関数 φ_p は Fréchet 微分可能. さらに $q \leq p^*$ ならば ψ_q も Fréchet 微分可能.

定理 3.1 (赤木-大谷 [2]) 爆発項の増大度 q が劣臨界条件 $q < p^*$ を満たす時, 任意の初期値 $u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ と $f \in W^{1,p'}(0, T; W^{-1,p'}(\Omega))$ に対して, ある $T_0 > 0$ が存在し, 以下の (9) を満たす $(0, T)$ 上の初期値境界値問題 (1), (3), (4) の弱解 u が存在する.

$$\begin{cases} u \in C_w([0, T_0]; W_0^{1,p}(\Omega)) \cap C([0, T_0]; L^q(\Omega)) \cap W^{1,2}(0, T_0; L^2(\Omega)), \\ \Delta_p u \in L^\infty(0, T_0; W^{-1,p'}(\Omega)), \quad |u|^{q-2}u \in C([0, T_0]; L^{q'}(\Omega)). \end{cases} \quad (9)$$

一方, (2) については以下の通り.

定理 3.2 (赤木 [1]) $p > 2N/(N+2)$ の場合, 以下を満たす任意の初期値 u_0 と外力項 f

$$\begin{aligned} u_0 &\in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^{2(m-1)}(\Omega) \cap L^m(\Omega), \\ f &\in L^2(0, T; L^2(\Omega)) \cap W^{1,p'}(0, T; W^{-1,p'}(\Omega)) \end{aligned}$$

に対して, 以下の (10) を満たす初期値境界値問題 (2), (3), (4) の弱解 u が存在する.

$$\begin{cases} u \in L^\infty(0, T; W_0^{1,p}(\Omega)), \\ |u|^{m-2}u \in C_w([0, T]; L^2(\Omega) \cap L^{m'}(\Omega)) \cap W^{1,\infty}(0, T; W^{-1,p'}(\Omega)), \\ \Delta_p u \in L^\infty(0, T; W^{-1,p'}(\Omega)). \end{cases} \quad (10)$$

また $p \geq 2n/(n+2)$ かつ $m < p^*$ の場合, 任意の $u_0 \in L^m(\Omega)$ と $f \in L^{p'}(0, T; W^{-1,p'}(\Omega))$ に対して, 以下の (11) を満たす初期値境界値問題 (2), (3), (4) の弱解 u が存在する.

$$\begin{cases} u \in L^p(0, T; W_0^{1,p}(\Omega)), \\ |u|^{m-2}u \in C_w([0, T]; L^{m'}(\Omega)) \cap W^{1,p'}(0, T; W^{-1,p'}(\Omega)), \\ \Delta_p u \in L^p(0, T; W^{-1,p'}(\Omega)). \end{cases} \quad (11)$$

References

- [1] Akagi, G., in preparation.
- [2] Akagi, G. and Ôtani, M., Evolution inclusions governed by the difference of two subdifferentials in reflexive Banach spaces, to appear in J. Differential Equations.
- [3] Ishii, H., Asymptotic stability and blowing up of solutions of some nonlinear equations, J. Differential Equations **26** (1977) 291-319.
- [4] Ôtani, M., Nonmonotone perturbations for nonlinear parabolic equations associated with subdifferential operators, Cauchy problems, J. Differential Equations **46** (1982) 268-299.
- [5] Tsutsumi, M., Existence and nonexistence of global solutions for nonlinear parabolic equations, Publ. RIMS Kyoto Univ. **8** (1972/3) 211-229.