

双曲空間上の逆問題と $\bar{\partial}$ 理論

筑波大学大学院数理物質科学研究科 磯崎 洋

1. **逆問題とは.** 多次元の Schrödinger 作用素に関する逆問題の重要な例として、有界領域における Dirichlet 境界値問題に対する Dirichlet-Neumann 写像からポテンシャルを定める境界値逆問題と、全空間における S 行列からポテンシャルを定める散乱の逆問題の2つがある. これらは同値な問題であり、3次元以上の場合には1980年代に解決された ([SyUh], [Na1], [KhNo]). そこにおける重要なアイディアは無限遠方で指数的に増加するような Schrödinger 方程式の解を利用することであり、複素幾何光学の方法と呼ばれたり、Faddeev のグリーン関数と呼ばれたりする. 両者は同じものの2つの側面であり、後者は次のように書かれる:

$$G(x, \zeta) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbf{R}^n} \frac{e^{ix \cdot (\xi + \zeta)}}{\xi^2 + 2\zeta \cdot \xi} d\xi.$$

この Green 関数はパラメータ $\zeta \in \mathbf{C}^n$ を含んでいる. 通常の Green 関数のかわりにこの Faddeev の Green 関数を用いることにより散乱振幅の類似物ができる. これを Faddeev の散乱振幅と呼ぶ. 逆散乱問題は Faddeev の散乱振幅からポテンシャルを求めることにより解かれる.

2. **双曲空間と逆問題.** これまでは Faddeev のグリーン関数が逆問題を解く唯一の道具と思われてきたが、最近 [Is1] によって双曲空間に埋め込む方法が提唱された. その概要は次のようなものである.

(Step 1) $\mathbf{R}^n$ における Schrödinger 方程式 $(-\Delta + q)u = 0$ の解 u に対して $v = x_n^{(n-2)/2}u$ とおけば v は $(H_0 + x_n^2 q - n(n-2)/4)v = 0$ をみたす. ここで $H_0 = -x_n^2 \Delta + (n-2)\partial_n$ は上半空間を双曲空間とみた $\mathbf{H}^n$ の Laplace-Beltrami 作用素である. したがって $\mathbf{H}^n$ の有界領域 Ω における境界値逆問題を考えればよい.

(Step 2) $\mathbf{H}^n$ の点を (x, x_n) と書くことにする. Gauge 変換により複素パラメータ $\theta \in \mathbf{C}^{n-1}$ を導入し、 H_0 のかわりに $H_0(\theta) = x_n^2(-\partial_n^2 + (-i\partial_x + \theta)^2) + (n-2)\partial_n$ を考える.

(Step 3) $\mathbf{R}^{n-1}$ の Lattice Γ を $\mathbf{H}^n$ に作用させる. ただしその基本領域 $\mathbf{E} = \mathbf{R}^{n-1}/\Gamma$ は十分大きく、 Ω が商空間 $\mathbf{H}^n/\Gamma$ の一つの coordinate patch の中にあるようにする.

(Step 4) $\mathbf{H}^n/\Gamma$ においても境界値逆問題と散乱の逆問題は同値である. そこで $\mathbf{H}^n/\Gamma$ における散乱の逆問題を考える.

(Step 5) $\mathbf{H}^n/\Gamma$ 上では $H_0(\theta)$ は Fourier 級数と変形 Bessel 関数によって表示される Green 関数をもつ. それは θ が適当な範囲にあるとき θ に関して analytic である. そこで $\mathbf{H}^n/\Gamma$ における Faddeev の散乱振幅に相当するものを構成し、パラメータ θ を無限遠にもっていけばポテンシャルが得られる.

3. **$\bar{\partial}$ -理論.** $\mathbf{R}^n$ における Faddeev の散乱振幅は Green 関数の含むパラメータ θ を引き継いでいる. それを $A(\xi, \zeta)$ と書こう. この関数は実は

$$\mathcal{V}_\xi = \{\zeta \in \mathbf{C}^n; \zeta^2 = E, \xi^2 + 2\zeta \cdot \xi = 0\}$$

を fibre とする fibre bundle $\mathcal{M} = \cup_{\xi} \{\xi\} \times \mathcal{V}_{\xi}$ 上の函数とみなせる. $A(\xi, \zeta)$ はこの fibre bundle 上で

$$\overline{\partial}_{\zeta} A(\xi, \zeta) = -(2\pi)^{1-n} \int_{\mathbf{R}^n} A(\xi - \eta, \zeta + \eta) A(\eta, \zeta) \eta \delta(\eta^2 + 2\zeta \cdot \eta) d\eta$$

という $\overline{\partial}$ -方程式をみたす. Bochner-Martinelli の公式の $\mathcal{V}_{\xi}$ 上への一般化を用いて V の積分表示ができる. これは非線形作用素による $\mathbf{R}^n$ 上の函数の反転公式とみなすことができる.

以上のことの analogy が $\mathbf{H}^3$ の場合に成り立つ [Is2].

4. **双曲等長写像と数値計算への応用.** 物体の電気伝導度を求める逆問題においては Schrödinger 方程式の適当な解を Dirichlet-Neumann 写像が作る 2 次形式に代入する方法がよく用いられるが, その際 Schrödinger 方程式の解で必要な性質をもつものを具体的に構成しなくてはならない. 3 次元においては四元数を用いた双曲等長変換を用いることによりある半球面の片側でパラメータに関して指数的に増加し, 反対側で指数的に減衰する解を構成することができる. これを用いることにより境界の一部分で与えたデータから物体内の異物の位置を特定するアルゴリズムが考えられる. これは数値計算に有効であることが期待できる [IINSU].

5. 参考文献

- [BeCo] R. Beals and R. R. Coifman, *Multidimensional inverse scattering and nonlinear partial differential equations*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics 43 (1985), 45-70.
- [Fa] L. D. Faddeev, *Inverse problems of quantum scattering theory*, J. Sov. Math. 5 (1976), 334-396.
- [IkSi] M. Ikehata and S. Siltanen, *Numerical method for finding the convex hull of an inclusion in conductivity from boundary measurements*, Inverse Problems 16 (2000), 1043-1052.
- [IINSU] T. Ide, H. Isozaki, S. Nakata, S. Sitanen and G. Uhlmann, *Dirichlet-Neumann map and the detection of inclusions in the electric conductivity problem from the localized data*, in preparation.
- [Is1] H. Isozaki, *Inverse spectral problems on hyperbolic manifolds and their applications to inverse boundary value problems in euclidean space*, Amer. J. Math. 126 (2004).
- [Is2] H. Isozaki, *The $\overline{\partial}$ -theory for inverse problems associated with Schrödinger operators on hyperbolic spaces*, preprint (2004).
- [KhNo] G. M. Khenkin and R. G. Novikov, *The $\overline{\partial}$ -equation in the multi-dimensional inverse scattering problem*, Russian Math. Surveys 42 (1987), 109-180.
- [Na1] A. Nachman, *Reconstruction from boundary measurements*, Ann. of Math. 128 (1988), 531-576.
- [Na2] A. Nachman, *Global uniqueness for a two dimensional inverse boundary value problem*, Ann. of Math. 143 (1996), 71-96.
- [SyUh] J. Sylvester and G. Uhlmann, *A global uniqueness theorem for an inverse boundary value problem*, Ann. of Math. 125 (1987), 153-169.