PARSEVAL FORMULA FOR WAVE EQUATIONS WITH DISSPATIVE TERM OF RANK ONE

門脇光輝 (愛媛大学工)，中澤秀夫（千葉工大工），渡辺一雄（学習院大理）

自己共役作用素が生成する波動方程式や Schödinger 方程式（の解）のスペクトルに基づく研究は多くの成果があり，すぐれた結果も少なくはない．研究の主流は解が各モードの重ね合わせで記述できることを示したり，またそのことを用いてさらに詳しい解析を行うことである．この解析で基本的な道具となっているのが自己共役作用素のスペクトル分解定理である． しかしながら非自己共役作用素についてはそのスペクトル分解定理の未整備もあり, 上記のような立場の研究は多くないように思われる． [2] は"small perturbation" の条件下で非自己共役系の解が散乱モードのみで記述できることを示しているがそれはスペクトルに固有値などの特異点が現れない十分条件にもなっている．[6] は同様の条件で逆問題まで論じている．

ここでは[1] に引き続き small perturabation ではないランク 1 の消散項をもつ波動方程式に対して上記問題の解決 (Theorem10, Corollary 12) に取り組む．その際に Parseval の等式 (Theorem8) が重要な役割をする．また証明全般においてレゾルベントに関する評価 (cf. [4]) を必要とする．

次の系を扱う．

$$\partial_t^2 u(x,t) + \langle \partial_t u, \varphi\rangle_0 \varphi(x) - \partial_x^2 u(x,t) = 0, \quad (x,t)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+ \tag{1}$$

ただし $\langle\cdot,\cdot\rangle_0$ は $L^2(\mathbb{R})$ の内積．また, $\varphi(x)$ についてはいったん， $\varphi(x)\in L^2_s(\mathbb{R})(s>1/2)$ としておくが, 後で仮定を追加する．(1) は次の摂動系とみなせることを注意する．

$$\partial_t^2 u(x,t) - \partial_x^2 u(x,t) = 0, \quad (x,t)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R} \tag{2}$$

(1) と (2) はそのまま扱うのではなく次の Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ において扱うことにする．

$\mathcal{H} = \dot{H}^1(\mathbb{R})\times L^2(\mathbb{R})$ としてその内積とノルムをそれぞれ $\langle\cdot,\cdot\rangle$, $\|\cdot\|$ とかく．また 作用素 A, A_0 を次で定義する：$D(A_0) = D(A) = \{f = {}^t(f_1, f_2)\in\mathcal{H}; \partial_x^2 f_1 \in L^2(\mathbb{R}), f_2\in H^1(\mathbb{R})\}$,

$$A = i\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \partial_x^2 & -\langle\cdot,\varphi\rangle_0\varphi \end{pmatrix}, \quad A_0 = i\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \partial_x^2 & 0 \end{pmatrix}$$

このとき A, A_0 は縮小半群 $\{e^{-itA}\}_{t\geqq 0}$ と unitary 群 $\{e^{-itA_0}\}_{t\in\mathbb{R}}$ をそれぞれ生成する (cf. [6])．また $z\in\mathbb{C}$ に対して $(A-z)^{-1}, (A_0-z)^{-1}$ をそれぞれ $R(z), R_0(z)$ とかく．ここで $f(t) = {}^t(u(x,t), \partial_t u(x,t))$ とおくと (1) (resp. (2)) は

$$\partial_t f = -iAf \quad (\mathrm{resp.}\, \partial_t f = -iA_0 f)$$

と書きなおせて $f(0) = f\in\mathcal{H}\cap D(A)(\mathrm{resp.}\, f(0) = f\in\mathcal{H}\cap D(A_0))$.

$$f(t) = e^{-itA}f \quad (\mathrm{resp.}\, f(t) = e^{-itA_0}f)$$

と解ける． これらに対して[5] におけるのと同様な議論を用いると次がわかる：

Theorem 0.

(1) A は実固有値をもたない。

(2) 波動作用素

$$W = s - \lim_{t\to\infty} e^{itA_0}e^{-itA}$$

が存在してかつ $W \not\equiv 0$.

Theorem0 は任意の $f \in \mathcal{H}$ に対して

$$\lim_{t\to\infty} \|e^{-itA}f - e^{-itA_0}Wf\| = 0.$$

が成り立つことと $(f, Wf) \neq (0,0)$ なる組みあわせが存在することも主張している．これはすなわち

$$f(t) = e^{-itA}f, f \in \mathcal{H} \tag{5}$$

が散乱モード（非束縛かつ非消散モード）をもつことを意味する．そこでわれわれの取り組むべき問題は以下のようになる：

(Q1) (5) は消散モードを持つか？
(答え：Proposition 3, 4)

(Q2) (5) の解が存在する（かもしれない）モードの重ね合わせで記述できるか？
(答え：Theorem10, Corollary12)

$\varphi(x)$ について，　次の (A1)，(A2) を仮定する：ある $s > 1/2$ に対して

$$\varphi(x) \in L^2_{s+1}(\mathbb{R}). \tag{A1}$$

$$\|\hat{\varphi}(\lambda)\|^2_{\hat{\mathcal{H}}} \leqq \|\hat{\varphi}(\mu)\|^2_{\hat{\mathcal{H}}} \quad (\lambda \geqq \mu \geqq 0) \tag{A2}$$

ただし, $\hat{\varphi}(\xi)$ は $\varphi(x)$ の Fourier 変換, $\lambda = |\xi|$ であり,

$$\|\hat{\varphi}(\lambda\cdot)\|^2_{\hat{\mathcal{H}}} = |\hat{\varphi}(\lambda)|^2 + |\hat{\varphi}(-\lambda)|^2.$$

とする．

(Q1),(Q2) に答えるために記号と Lemma などを述べる．

$r_0(z) = (-\partial_x^2 - z^2)^{-1}$ について $\Gamma(z) = 1 - iz\langle r_0(z)\varphi, \varphi\rangle_0$ とかき,

$$\Sigma_\pm = \{z \in \mathbb{C}_\pm : \Gamma(z) = 0\}, \quad \Sigma^0_\pm = \{z \in \mathbb{R} : \Gamma(\lambda \pm i0) = 0\}$$

とおく．このとき

Lemma 1. 　$z \notin \Sigma_\pm \Longleftrightarrow z \in \rho(A) \cap \mathbb{C}_\pm$ かつ 任意の $f \in \mathcal{H}$ に対して

$$R(z)f = R_0(z)f + \frac{i\langle f, \begin{pmatrix} ir_0(\overline{z})\varphi \\ \overline{z}r_0(\overline{z})\varphi \end{pmatrix}\rangle}{\Gamma(z)} \begin{pmatrix} ir_0(z)\varphi \\ zr_0(z)\varphi \end{pmatrix}$$

となる．

Lemma1 より $\Sigma_\pm, \Sigma^0_\pm$ の特徴づけが重要となる．まず,Σ_+, Σ^0_+ については次を得る．

Lemma 2. $\Sigma_+ = \Sigma_+^0 = \emptyset$

この証明には仮定 (A1),(A2) を要求しない．

Proposition 3. Σ_- は（存在しても）離散的な純虚数からなる．さらに, それらは $\dfrac{1}{\Gamma(z)}$ の一位の極である．

この証明は (A2) を用いてなされる．

$\Sigma_- = \{z_j = i\kappa_j; \kappa_j < 0, (j = 1, 2, 3, \ldots m)\}$ とかくと, $f, g \in \mathcal{H}$ に対して作用素 P が

$$\langle Pf, g\rangle = \frac{-1}{2\pi i}\int_C \langle R(z)f, g\rangle dz$$

（ただし，C は $\{z_j\}_{j=1,2,3\ldots m}$ をその内部に含む単一閉曲線）により定義され, Σ_- は A の（非実）固有値であり,

$$P^2 = P$$

を満たすことがわかる (cf. [8])．P を一般化された射影作用素と呼ぶことにする．

そして Proposition3 から次がわかる．

Proposition 4.

$$RangeP \subset KerW$$

(A1),(A2) を用いると次が示される：

Proposition 5.

$$\Sigma_-^0 = \begin{cases} \emptyset & (\Gamma(0) \neq 0) \\ \{0\} & (\Gamma(0) = 0) \end{cases}$$

ただし

$$\Gamma(0) = 1 - \frac{1}{2}|\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)dx|^2.$$

$f = {}^t(f_1, f_2) \in C_0^\infty(\mathbb{R}) \times C_0^\infty(\mathbb{R})$ に対して作用素 $\mathfrak{F}_0$ を次のように定義する：

$$\mathfrak{F}_0 f(\lambda) = \begin{cases} {}^t(\frac{\lambda\hat{f}_1(\lambda)+i\hat{f}_2(\lambda)}{\sqrt{2}}, \frac{\lambda\hat{f}_1(-\lambda)+i\hat{f}_2(-\lambda)}{\sqrt{2}}), & (\lambda > 0) \\ {}^t(\frac{-\lambda\hat{f}_1(-\lambda)-i\hat{f}_2(-\lambda)}{\sqrt{2}}, \frac{-\lambda\hat{f}_1(\lambda)-i\hat{f}_2(\lambda)}{\sqrt{2}}), & (\lambda < 0) \end{cases}$$

このとき

Lemma 6. $\mathfrak{F}_0$ は $\mathcal{H}$ から $L^2(\mathbb{R}; \hat{\mathcal{H}})$ への *unitary* 作用素に拡張でき

$$\langle A_0 f, g\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda\langle \mathfrak{F}_0 f, \mathfrak{F}_0 g\rangle_{\hat{\mathcal{H}}} d\lambda, \quad (f \in D(A), g \in \mathcal{H})$$

を満たす．　ただし $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\hat{\mathcal{H}}}$ は $\|\cdot\|_{\hat{\mathcal{H}}}$ を *norm* とする *Hilbert* 空間 $\hat{\mathcal{H}}$ の内積である．

$f, g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \times C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ に対して

$$\langle Wf, g\rangle = \lim_{\kappa\downarrow 0}\int_{-\infty}^{\infty} \langle R(\lambda + i\kappa)f, R_0(\lambda + i\kappa)g\rangle d\lambda$$

を利用して計算すると (cf , [3]), 各 $\lambda \in \mathbb{R}$ と $f = {}^t(f_1, f_2) \in C_0^\infty(\mathbb{R}) \times C_0^\infty(\mathbb{R})$ に対して定義された作用素 $\mathfrak{F}$:

$$(\mathfrak{F}f)(\lambda) = (\mathfrak{F}_0 f)(\lambda) + \frac{i\langle f, \begin{pmatrix} ir_0(\lambda - i0)\varphi \\ \lambda r_0(\lambda - i0)\varphi \end{pmatrix}\rangle}{1 - i\lambda\langle r_0(\lambda + i0)\varphi, \varphi\rangle_0}(\mathfrak{F}_0 \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi \end{pmatrix})(\lambda),$$

について, 次を示すことができる：

Proposition 7. $\mathfrak{F}$ は $\mathcal{H}$ から $L^2(\mathbb{R}; \hat{\mathcal{H}})$ への有界作用素に拡張でき，$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_0 W$ も満たす.

次に作用素 $\mathfrak{G}$ を次のように定義する：各 $\lambda \in \mathbb{R}, \notin \Sigma_0^-$ と $g = {}^t(g_1, g_2) \in C_0^\infty(\mathbb{R}) \times C_0^\infty(\mathbb{R})$ に対して

$$(\mathfrak{G}g)(\lambda) = (\mathfrak{F}_0 g)(\lambda) - \frac{i\langle g, \begin{pmatrix} ir_0(\lambda - i0)\varphi \\ \lambda r_0(\lambda - i0)\varphi \end{pmatrix}\rangle}{1 + i\lambda\langle r_0(\lambda + i0)\varphi, \varphi\rangle_0}(\mathfrak{F}_0 \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi \end{pmatrix})(\lambda)$$

そして, 留数定理から次を得る：

Theorem 8(Parseval の等式). 任意の $f \in \mathcal{H}$ と

$$任意の\ g \in \begin{cases} \mathcal{H}, & (\Gamma(0) \neq 0) \\ \mathcal{E}, & (\Gamma(0) = 0) \end{cases}$$

に対して

$$\int_{-\infty}^{\infty} \langle (\mathfrak{F}f)(\lambda), (\mathfrak{G}g)(\lambda)\rangle_{\hat{\mathcal{H}}} d\lambda = \langle f, g\rangle - \langle Pf, g\rangle$$

が成り立つ．ただし

$$\mathcal{E} = \{g = {}^t(g_1, g_2) \in C_0^\infty(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R}); \langle \varphi, g_1\rangle_0 - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \varphi(y)dy \int_{\mathbb{R}} \overline{g_2(x)}dx = 0\}$$

である.

$\mathcal{E}$ については次がわかる：

Lemma 9. $\mathcal{E}$ は $\mathcal{H}$ で稠密である

Theorem 8 と Lemma 9 から次が示される：

Theorem 10. $Range P = Ker W$

Remark 11. Theorem 10 は次を意味する：

「$f \in Range P$」は「$\lim_{t\to\infty} \|e^{-itA}f\| = 0$」であるための必要十分条件である.

Corollary 12. $f \in \mathcal{H}$ とする．このとき $f - Pf \neq 0$ は

$$\lim_{t\to\infty} \|e^{-itA}f - e^{-itA_0}Wf\| = 0 \quad (Wf \neq 0)$$

であるための必要十分条件である.

References

1. M. Kadowaki, H. Nakazawa and K. Watanabe, *On the asymptotics of solutions for some Schrödinger equations with dissipative perturbations of rank one*, Hiroshima Math.J. (to appear).
2. T. Kato, *Wave operators and similarity for some non–self adjoint operators*, Math. Ann. **162** (1966), 258–279.
3. S. T. Kuroda, *Spectral theory II*, Iwanami, Tokyo, 1978.
4. ———, *An Introduction to Scattering Theory*, Lecture Note Series N^o 51, Matematisk Institut. Aarhus University, 1980.
5. K. Mochizuki, *Scattering theory for wave equations with dissipative terms*, Publ. RIMS Kyoto Univ. **12** (1976), 383–390.
6. ———, *Inverse scattering for a small nonselfadjoint perturbation of the wave equation*, to appear in Kluwer Ser. Proceedings ISAAC 2001.
7. M. Reed and B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics, II. Forier Analysis, Self-Adjointness*, Academic Press, New York, San Francisco, London, 1975.
8. ———, *Methods of modern mathematical physics, IV, Analysis of operators*, Academic Press, 1978.