2004 年 7 月 24 日　神楽坂解析セミナー

非線形 Schrödinger 方程式の時間に関する解の漸近挙動について

川原　雄一朗（大阪大学大学院理学研究科）

次の非線形 Schrödinger 方程式の解の漸近的振る舞いについて考察する.

$$
\begin{cases} i\partial_t u + \frac{1}{2}\Delta u = \mathcal{N}(u,\bar{u}), & (t,x) \in \mathbf{R}\times\mathbf{R}^3, \\ u(0,x) = u_0, & x \in \mathbf{R}^3, \end{cases} \tag{1}
$$

ここで, $u = u(t,x)$ は複素数値関数とする. u_0 は無限遠方で減衰していて滑らかで十分小さいものとする. また非線形項 $\mathcal{N}$ は u と $\bar{u}$ に関して滑らか, かつ適当な $\delta > 0$ が存在して

$$
|\mathcal{N}(u,\bar{u})| \le C|u|^2, \quad |u| \le \delta
$$

を満足し, $|u|^2$ は含まないものとする.

今回は文献 [1] において得られた解の漸近的振る舞いについての改良した結果を報告する. ここで用いられている記号と関数空間について説明する. Schrödinger 発展作用素を

$$
\mathcal{U}(t)\phi = \frac{1}{(2\pi i t)^{\frac{3}{2}}}\int e^{\frac{i|x-y|^2}{2t}}\phi(y)dy
$$

とする. 重みつきソボレフ空間を

$$
H^{m,k} = \{\phi \in L^2 : \|\phi\|_{m,k} = \|(1+|x|^2)^{\frac{k}{2}}(1-\Delta)^{\frac{m}{2}}\phi\|_{L^2} < \infty\},\ m,k \in \mathbf{R}_+
$$

で定義する.

2 次の非線形項を持つ非線形 Schrödinger 方程式については多くの研究がなされている. [2] の結果から 2 次の非線形項に対して空間次元が 4 次元以上の場合に, 小さな初期値に対する大域解の存在が証明されていることが分かる.

N. Hayashi-T. Mizumachi- P. Naumkin [1] によって空間次元が 3 次元の場合に, 次の方程式に対する小さな初期値に対する大域解の存在, 解の時間減衰評価, 解の漸近的振る舞いについて研究されている.

$$
\begin{cases} i\partial_t u + \frac{1}{2}\Delta u = \lambda u^2 + \mu\bar{u}^2, & (t,x) \in \mathbf{R}\times\mathbf{R}^3, \\ u(0,x) = u_0, & x \in \mathbf{R}^3. \end{cases} \tag{2}
$$

ここで, パラメータ λ, μ は複素数とする. 解の時間減衰評価

$$
\|u(t)\|_{L^\infty} \le Ct^{-\frac{3}{2}},
$$

そして $u_+ \in L^2$ が一意的に存在して

$$
\|u(t) - \mathcal{U}(t)u_+\|_{L^2} \le C\varepsilon t^{-\frac{1}{2}}, \quad t > 1 \tag{3}
$$

が示されている．

我々の目的は (3) が $t^{-\frac{1}{2}}$ のオーダーより速い減衰で時間大域解が自由解に漸近することを示すことである．非線形項 $u^2, \bar{u}^2$ の特別な構造を用いることにより第 2 近似を構成して，第 2 近似の減衰を利用することにより次の主結果を得ることができた．

定理 *Let* $u_0 \in H^{3,0} \cap H^{1,2}$ *and* $\varepsilon = \|u_0\|_{3,0} + \|u_0\|_{1,2}$. *Then there exists an* $\varepsilon > 0$ *such that (1) has a unique global solution* u *satisfying* $u \in C\left(\mathbf{R}; H^{3,0} \cap H^{1,2}\right)$ *and*

$$\|u(t)\|_{L^\infty} \le C\varepsilon^{\frac{1}{2}} \langle t \rangle^{-\frac{3}{2}},\ \|u(t)\|_{L^2} \le C\varepsilon^{\frac{1}{2}}.$$

Moreover, there exists a unique final state $\hat{u}_+ \in L^2 \cap L^\infty$ *such that*

$$\begin{aligned} (4)\quad \Big\| \mathcal{F}\mathcal{U}(-t)u(t) &- \hat{u}_+ - \lambda 2^{-\frac{3}{2}} i^{-\frac{9}{2}} \int_t^\infty e^{\frac{i\tau|\xi|^2}{4}} \tau^{-\frac{3}{2}} d\tau \hat{u}_+^2(\frac{\xi}{2}) \\ &- \mu 2^{-\frac{3}{2}} i^{\frac{9}{2}} \int_t^\infty e^{\frac{3i\tau|\xi|^2}{4}} \tau^{-\frac{3}{2}} d\tau \overline{\hat{u}}_+^2(-\frac{\xi}{2}) \Big\|_{L^2} \le C\varepsilon t^{\theta-\frac{3}{2}} \quad for\ t > 1 \end{aligned}$$

and

$$(5)\qquad \|u(t) - \mathcal{U}(t)u_+\|_{L^2} \le C\varepsilon t^{-\frac{5}{4}} \quad for\ t > 1,$$

where $\theta > 0$,

$$\left\|\lambda 2^{-\frac{3}{2}} i^{-\frac{9}{2}} \int_t^\infty e^{\frac{i\tau|\xi|^2}{4}} \tau^{-\frac{3}{2}} d\tau \hat{u}_+^2(\frac{\xi}{2})\right\|_{L^2} + \left\|\mu 2^{-\frac{3}{2}} i^{\frac{9}{2}} \int_t^\infty e^{\frac{3i\tau|\xi|^2}{4}} \tau^{-\frac{3}{2}} d\tau \overline{\hat{u}}_+^2(-\frac{\xi}{2})\right\|_{L^2} \le C\varepsilon t^{-\frac{5}{4}}$$

for $t > 1$.

参考文献

[1] N. Hayashi, T. Mizumachi, and P. I. Naumkin, *Time decay of small solutions to quadratic nonlinear Schrödinger equations in 3D,* Differential Integral Equations **16** (2003), 159-179.

[2] W. A. Strauss, *Nonlinear scattering thory at low energy,* J. Funct. Anal. **41** (1981), 110-133.