

L^p 粘性解と Perron の方法

(小池 茂昭 埼玉大学)

6 月 26 日 於 東京理科大学

副題を『Perron の方法-再訪-』として講演させていただきます。

非発散型の非線形 (退化) 楕円型方程式の弱解として、Crandall-P.-L. Lions によって導入された《粘性解》は、今までうまく扱えなかった方程式 (Bellman 方程式・Isaacs 方程式・平均曲率流方程式・ Δ_∞ 方程式等) の解析に大きく貢献してきた。

粘性解理論の第一の特徴は、適当な仮定の下で成立する比較原理から一意性・連続性・安定性が導かれる点にあるともいえる。しかしながら、係数に不連続性がある場合や非コンパクト制御問題に対応する非線形性 (例えば、 $|Du|^2$ の項) を持つ場合など、いくつかの応用上重要な場合に比較原理が成立するかどうか知られていない。

(この事を念頭に置きつつ) 今回は、粘性解の存在定理について最近の結果を述べる。

粘性解の存在定理は、主に次の二つある。

- (1) 方程式に対応する (確率) 最適制御 (又は、微分ゲーム) の値関数 (value function) として表現する方法
- (2) 石井仁司先生によって示された **Perron の方法**

ここでは、最初に Perron の方法を見直し、“修正版 Perron の方法”を紹介する。

さて、Perron の方法で作られた粘性解は連続性が一般にはなく、比較原理を通じて連続性を導くのが普通の戦略であった。しかし、比較原理が成立しない方程式の場合は、それらに対しては我々の粘性解が連続かどうかわからない。

この講演では、次に、一様楕円型の場合 (ただし係数に連続性は仮定しないでよい) に修正版 Perron の方法で構成した粘性解が局所 Hölder 連続性を持つことを示す。(実際には、 L^p 粘性解の範疇でもできるが、簡単のため与えられた関数の連続性を仮定する。)

この部分には Aleksandrov-Bakelman-Pucci の最大値原理をはじめ、その応用である、弱 Harnack 不等式・局所最大値原理の (半連続) 粘性解への拡張が含まれる。

最後に、何故、連続性を導く事にこだわるかを数理ファイナンスに現れる問題を通して説明する予定である。