

harvesting term をもつ拡散 logistic 方程式の定常解について

佐藤 健悟 (東京理科大学大学院 理学研究科 数学専攻 M2)

1 introduction

収穫項 (harvesting term) をもつ拡散 logistic 方程式については, Oruganti-Shi-Shivaji [3] により多くの興味深い結果が述べられているが, 定理の証明にはいくつかの不完全な点がある. その証明の不備を完全に補い, いくつかの新しい結果を得た. 考える問題は, 次の非線型楕円型方程式の境界値問題である.

$$\begin{cases} -\Delta u = au - bu^2 - ch(x) & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \quad (\text{DL})$$

ここで, Ω は C^2 級の境界をもつ $\mathbb{R}^N$ ($N \geq 1$) の有界領域, $a, b > 0$, $c \geq 0$ は定数, $h \in C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$ ($0 < \alpha < 1$) は, 実数値関数で, $h(x) > 0$ ($x \in \Omega$), $h(x) = 0$ ($x \in \partial\Omega$), $\|h\|_\infty = 1$ をみたすものとする.

Known Results $c = 0$ の場合 (logistic case) については, 多くの研究結果がすでに知られている. 特に次の定理は本研究の基本となる大変重要な結果である.

定理 1 ([3, Theorem 2.5]). 境界値問題 ((DL) で $c = 0$ の場合) :

$$\begin{cases} -\Delta u = au - bu^2 & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \quad (1)$$

について次が成り立つ.

(i) $a \leq \lambda_1$ ならば, (1) は正値解をもたない.

(ii) $a > \lambda_1$ ならば, (1) は正値解 v_a を一意にもち, v_a は安定解で, a に関して単調増加である. ここで λ_1 は 0-Dirichlet 境界条件つき $-\Delta$ の第 1 固有値である.

(DL) の解 u が安定であるとは, u において線型化した方程式:

$$\begin{cases} -\Delta \psi - a\psi + 2bu\psi = 0 & \text{in } \Omega \\ \psi = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \quad (2)$$

が非自明解をもつことをいう.

2 本研究の内容

Oruganti-Shi-Shivaji [3] は, 収穫比率 $c > 0$ を変化させたときの (DL) の正値解の存在について論じている. [3] では次のようなことが成り立つと主張されている. すなわち, (i) $a > \lambda_1$ ならば, ある定数 $c_1 = c_1(a, b) > 0$ が存在し, 任意の $c \in (0, c_1)$ に対し, (DL) は $au_1(x, c) - bu_1(x, c)^2 > ch(x) > 0$ ($\forall x \in \Omega$) をみたす正値解 $u_1(x, c)$ をもつ, (ii) $a > \lambda_1$ ならば, ある $c_2 > 0$ があって, 任意の $c \in (0, c_2)$ に対して, (DL) は極大正値解 $u_1(x, c)$ をもつ, (iii) $a > \lambda_1$, $a \notin \sigma_p(-\Delta)$ ならば, ある定数 $c_3 \in (0, c_2]$ が存在し, $c \in (0, c_3)$ ならば, $u_1(x, c)$ と異なる解 $u_2(x, c)$ が存在する,

(iv) $a > \lambda_1$ が λ_1 に十分近ければ, (DL) の完全な分岐図を描くことができる, というものである.

まず, (iii) について, $u_2(x, c)$ の正値性の証明を完全にし, 併せて $u_2(x, c)$ のパラメータ c に関する単調増加性も得られた. 正確に述べると次のようになる.

定理 2. (iii) の仮定の下, ある $c_4 \in (0, c_3]$ と, ある $\delta_h > 0$ があって, 任意の $c \in (0, c_4)$, $a \in (\lambda_1, \lambda_1 + \delta_h)$ に対して, (DL) の解 $u_2(x, c)$ は正値で, c に関して単調増加である.

[3] では 2 つの補題を準備して (iv) を示している. ところが [3] で述べられている補題の証明は共に完全ではない. そこで, [3] で述べられている補題の主張を少し修正して, 次の形で補題を示し, (iv) の証明を完全にした. 以下, p を十分大きくとり, $W^{2,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ ($0 < \alpha < 1$) となるようにする.

補題 3. ある $\delta_3 > 0$ があり, 任意の $a \in (\lambda_1, \lambda_1 + \delta_3)$ に対して, $\delta_4 > 0$ があって, (DL) をみたす $c \geq 0$ と退化解 $u \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega) =: X$ の組 (c, u) が, $\{(c, u) \in \mathbb{R} \times X \mid |c| \leq \delta_4, \|u\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq \delta_4\}$ の中にただ 1 つ存在する.

補題 4. $O_\delta := \{(c, u) \in \mathbb{R} \times X \mid 0 \leq c \leq \delta, \|u\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq \delta\}$ とする. 十分小さい任意の $\delta > 0$ に対し, ある $\eta > 0$ があって, 任意の $a \in (\lambda_1, \lambda_1 + \eta)$ に対して, $c \geq 0$, $u \geq 0$ が (DL) をみたすならば, $(c, u) \in O_\delta$ であり, 逆に, $(c, u) \in O_\delta$ が (DL) をみたすならば, $u \geq 0$ となる.

補題 4 により, $\eta > 0$ を十分小さくとれば, 任意の $a \in (\lambda_1, \lambda_1 + \eta)$ に対し, (DL) の非負値解がすべて O_δ の中にあり, それ以外の非負値解は存在しないことが分かる. そして補題 4 で存在と一意性が主張されている退化解は $u_1(x, c_2)$ のことであることが分かり, このことから $u_1(x, c_2)$ 以外のすべての解は非退化であることが分かる. これが $u_2(\cdot, c)$ の分岐枝を c_2 までのばすポイントであり, 以降の証明は [3] でなされている.

最後に, a が λ_1 から, ある程度離れたときについては, 次の結果を得た. λ_2 を 0-Dirichlet 境界条件付きの $-\Delta$ の第 2 固有値とする.

定理 5. $a \in (\lambda_1, \lambda_2)$, $b > 0$ とする. また, $c_5 > 0$ を $u_2(x, c)$ を非退化正値解として延長できるような $c > 0$ の上限とする. このとき, $c \in [0, c_5)$ ならば (DL) の非負値解は $u_1(x, c)$, $u_2(x, c)$ の 2 個である.

この定理は, 楕円型偏微分作用素の固有値の Minimax 原理と陰関数定理, サドル・ノード分岐定理により得られる.

参考文献

- [1] Clément, Ph., Peletier, L.A., *Anti-maximum principle for second-order elliptic operators*, J. Differential Equations, **34**, no.2 (1979) 218-229.
- [2] Crandall, M.G., Rabinowitz, P.H., *Bifurcation from Simple Eigenvalue*, Jour. Func. Anal. **8** (1973) 321-340.
- [3] Oruganti, S., Shi, J., Shivaji, R., *Diffusive Logistic Equation with Constant Yield Harvesting. I: Steady States*, Trans. Amer. Math. Soc. **354**, no.9 (2002) 3601-3619.