# Asymptotic profiles of variational solutions for a FitzHugh-Nagumo type elliptic system*

東京都立大学　松澤　寛

2004 年 4 月 24 日

## 1 Introduction

この論文では, 次の FitzHugh-Nagumo 型の楕円型方程式系の境界値問題:

$$
(\mathrm{P}_\lambda)\begin{cases} -\Delta u = \lambda(f(u) - v) & \text{in } \Omega, \\ -\Delta v = \lambda(\delta u - \gamma v) & \text{in } \Omega, \\ u = v = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}
$$

を考える. ここに, $\Omega \subset \mathbb{R}^N\,(N \geq 1)$ は境界が滑らかな有界領域, $\delta, \gamma$ は正の定数, $\lambda > 0$ はパラメータである. また, $f$ $f(u) = u(u-a)(1-u)$, $0 < a < 1/2$ なる 3 次関数である. この問題は FitzHugh-Nagumo 方程式の初期値境界値問題

$$
(\mathrm{D}_\lambda)\begin{cases} u_t - \lambda^{-1}\Delta u = f(u) - v & \text{in } \mathbb{R}^+ \times \Omega, \\ v_t - \lambda^{-1}\Delta v = \delta u - \gamma v & \text{in } \mathbb{R}^+ \times \Omega, \\ u = v = 0 & \text{on } \mathbb{R}^+ \times \partial\Omega, \\ u(0,x) = u_0(x),\ v(0,x) = v_0(x) \end{cases}
$$

の定常問題となる. FitzHugh-Nagumo 方程式は神経伝達や他の化学, 生物現象を記述する方程式として知られている. 我々は問題 $(\mathrm{D}_\lambda)$ の解の dynamics を明らかにすることが最終的な目的であるが, そのために問題 $(\mathrm{D}_\lambda)$ の定常問題である $(\mathrm{P}_\lambda)$ の解の構造を調べる必要がある. 具体的な問題としては, 解の exact な個数とその安定性, 全空間の問題における正値球対称解の一意性などがあり, さらにその足がかりとして, 解の形状の問題がある. この研究では後に述べるように, 変分法により得られた 2 つの解について, その形状を調べた.

問題 $(\mathrm{P}_\lambda)$ の第 2 式は $u$ を用いて, $v$ について解けることに注意すると, この問題は non-local term を含む単独方程式に書きかえられる. 詳しく言うと, $B_\lambda := (-\lambda^{-1}\Delta + \gamma)^{-1} : L^2(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ とすると, 問題 $(\mathrm{P}_\lambda)$ は次のような単独方程式に書きかえられる:

$$
(\mathrm{NL}_\lambda)\begin{cases} -\Delta u + \lambda\delta B_\lambda u = \lambda f(u) & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases}
$$

*神楽坂解析セミナー講演アブストラクト

この方程式の解であることは次のエネルギー汎関数:

$$J_\lambda(u) = \int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla u|^2 + \frac{\lambda}{2}\delta(B_\lambda u)u - \lambda F(u)dx,\ F(u) = \int_0^u f(v)dv,$$

の $H_0^1(\Omega)$ 上での臨界点であることと同値である. Klaasen and Mitidieri [6] はこの汎関数を用いて, $\lambda$ が十分大きいとき, 問題 $(\mathrm{P}_\lambda)$ には 2 つの解 $(\underline{u}_\lambda, \underline{v}_\lambda)$ ,$(\overline{u}_\lambda, \overline{v}_\lambda)$ が存在することを示している. $(\overline{u}_\lambda, \overline{v}_\lambda)$ は $J_\lambda$ の global minimizer として得られ, $(\underline{u}_\lambda, \underline{v}_\lambda)$ は Mountain Pass Theorem を用いて得られる.

また Reinecke and Sweers [12] は問題 $(\mathrm{P}_\lambda)$ がある parameter range では quasimonotone と呼ばれる system に変換できることに注目して, subsolution, supersolution の方法を用いて解 $(U_\lambda, V_\lambda)$ を得ている. この解は幅が $O(\lambda^{-1/2})$ であるような boundary layer をもつことも示されている. また, quasimonotone system は最大値原理が成り立ち, scalar 方程式によく似た性質をもつため, 問題 $(\mathrm{P}_\lambda)$ が quasimonotone system となるような parameter range では scalar 方程式

$$(\mathrm{S}_\lambda) \begin{cases} -\Delta u = \lambda f(u) & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

と同様な結果が期待できる.

他方, scalar 方程式 $(\mathrm{S}_\lambda)$ の場合, もし $\lambda > 0$ が十分大きければ, 少なくとも 2 つの正値解が存在することがわかっており, 片方は

$$I_\lambda(u) = \int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla u|^2 - \lambda F(u)dx$$

の global minimizer として得られ, 幅 $O(\lambda^{-1/2})$ の boundary layer をもつ. また, 他方は Mountain Pass Theorem によって得られ, もし $\Omega$ が convex であれば spike 的な形状をもつことが知られている (see Jang [5]). また, Ouyang and Shi [8] では $\Omega$ が ball のときに $(\mathrm{S}_\lambda)$ の解の exact な個数をすべての $\lambda > 0$ の場合に調べている. さらに Ouyang and Shi では得られた解の安定性も調べており, global minimizer で得られた解は安定, Mountain Pass Theorem で得られた解は不安定であることが示されている.

以上を踏まえて我々は問題 $(\mathrm{P}_\lambda)$ の解の形状を考察する. この問題では $J_\lambda$ の global minimizer $\overline{u}_\lambda$ と Reinecke and Sweers が得た boundary layer solution を持つ解 $U_\lambda$ が一致するかどうかは分っていなかったが, 我々は十分大きな $\lambda > 0$ に対しては両者が一致することを示すことができた. また, $\Omega$ が ball のとき, Mountain Pass Theorem で得られる解 $\underline{u}_\lambda$ は 十分大きな $\lambda > 0$ に対して, spike 的な形状を持つことも示すことができた. これらは共に, $U_\lambda$ の新しい特徴づけを示すことができたことに基づいている.

## 2 仮定と主結果

ここでは, 我々が得た結果を述べる. その前に我々は parameter $\delta, \gamma$ に次の 3 条件を課す.

**仮定 1.** $\dfrac{\delta}{\gamma} < a < \gamma - 2\sqrt{\delta}.$

De Figueiredo and Mitidieri [2] は, 条件 1 のもとで, 問題 ($\mathrm{NL}_\lambda$) の非自明解はすべて正値解であることを示した. 次に,

**仮定 2.** $\gamma - 2\sqrt{\delta} > M := \dfrac{(1-a)^2}{2} + \dfrac{1+a}{2}\sqrt{(1-a)^2 + 4\dfrac{\delta}{\gamma}} + 3\dfrac{\delta}{\gamma}$.

この条件は問題 ($\mathrm{P}_\lambda$) を quasimonotone system へ変換するための条件である. 最後に

**仮定 3.** $\dfrac{2a^2 - 5a + 2}{9} > \beta := \dfrac{1}{2}(\gamma - M) - \dfrac{1}{2}\sqrt{(\gamma - M)^2 - 4\delta}$.

この条件は条件 2 を用いて quasimonotone system に変換された問題の subsolution を構成するための条件である. この条件から $(2a^2 - 5a + 2)/9 > \delta/\gamma$ が得られることに注意する. また, 条件 $(2a^2 - 5a + 2)/9 > \delta/\gamma$ は次の条件と同値であることにも注意しておく:

- $f(u) - \dfrac{\delta}{\gamma}u$ は 3 つの実根 $0 < \rho^-_{\delta/\gamma} < \rho^+_{\delta/\gamma}$ を持ち,

$$\int_0^{\rho^+_{\delta/\gamma}} \left( f(u) - \frac{\delta}{\gamma}u \right) du > 0$$

  が成り立つ.

以上 3 つの条件は $\delta/\gamma$ が十分小さく, $\gamma$ が十分大きい, 例えば固定された $\delta$ に対し, $\gamma$ を十分大きくとればすべてみたされる.

我々の主結果は次の通りである.

**定理 1.** 仮定 2, 3 が満たされているとする. このときある $\varepsilon > 0$ と $\lambda^\sharp > 0$ が存在して, $(u_\lambda, v_\lambda)$ を ($\mathrm{P}_\lambda$) の $\lambda > \lambda^\sharp$ で $\max_\Omega u_\lambda \in (\rho^+_{\delta/\gamma} - \varepsilon, \rho^+_{\delta/\gamma})$ なる解とすると, $u_\lambda = U_\lambda$ が成り立つ. ここに $(U_\lambda, V_\lambda)$ は Reinecke and Sweers にて得られる boundary layer をもつ解である.

**定理 2.** 仮定 1, 2, 3 が成り立つとすると, ある $\lambda^\flat > 0$ が存在して, $\lambda > \lambda^\flat$ ならば $\overline{u}_\lambda = U_\lambda$ が成り立つ. ここに, $\overline{u}_\lambda$ は汎関数 $J_\lambda$ の global minimizer である.

**定理 3.** $\Omega$ を $\mathbb{R}^N$ の単位球とし, 仮定 1, 2, 3 が満たされているとする. また, $(\underline{u}_\lambda, \underline{v}_\lambda)$ を Mountain Pass Theorem で得られる解とする. このとき, 次が成り立つ:

(1) $\underline{u}_\lambda(0) \geq \rho^-_{\delta/\gamma}$

(2) $\tilde{u}_\lambda(x) = \underline{u}_\lambda(\lambda^{-1/2}x)$, $\tilde{v}_\lambda(x) = \underline{v}_\lambda(\lambda^{-1/2}x)$ とおくと, $\{\tilde{u}_\lambda\}$, $\{\tilde{v}_\lambda\}$ は $C^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$ で precompact となり,

$$(\mathrm{P}) \begin{cases} -\Delta u = f(u) - v & \text{in } \mathbb{R}^N, \\ -\Delta v = \delta u - \gamma v & \text{in } \mathbb{R}^N, \\ u(x) \to 0 & \text{as } |x| \to \infty, \\ v(x) \to 0 & \text{as } |x| \to \infty. \end{cases}$$

の正値球対称解に収束するような部分列をもつ.

(3) $\underline{u}_\lambda, \underline{v}_\lambda$ は $\lambda \to +\infty$ のとき 0 に $\overline{B_1(0)} \backslash \{0\}$ 上広義一様収束する.

また, 定理 3 の性質 (1) と (3) をもって解が spike 的な形状をもつことを意味する.

# 参考文献


[1] Ph. Clément and G. Sweers, *Existence and multiplicity results for a semilinear elliptic eigenvalue problem*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci., **14(4)**(1987), 97-121.

[2] D.G. de Figueiredo and E. Mitidieri, *A maximum principle for an elliptic system and applications to semilinear problems*, SIAM J. Math. Anal, **17**(1986), 836-849.

[3] R. Gardner and L.A. Peletier, *The set of positive solutions of semilinear equations in large balls*, Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, **104A**(1986), 53-72.

[4] B. Gidas, W. M. Ni and L. Nirenberg, *Symmetry and related properties via the maximum principle*, Comm. Math. Phys., **68**(1979), 209-243.

[5] J. Jang, *On spike solutions of singularly perturbed semilinear Dirichlet problem*, J. Differential Equations, **114**(1994), 370-395.

[6] G. Klaasen and E. Mitidieri, *Standing wave solutions for system derived from the FitzHugh-Nagumo equations for nerve conduction*, SIAM J. Math. Anal., **17**(1986), 74-83.

[7] A.C. Lazer and P.J. McKenna, *On steady states solutions of a system of reaction-diffusion system*, Nonlinear Analysis, **6**(1982), 523-530.

[8] T. Ouyang and J. Shi, *Exact multiplicity of positive solutions for a class of semilinear problem*, J. Differential Equations, **146**(1998), 121-156.

[9] H. Matsuzawa, *Asymptotic profiles of variational solutions for a FitzHugh-Nagumo type elliptic system*, Differential and Integral Equations, **16**(2003), 827-926

[10] L.A. Peletier and J. Serrin, *Uniqueness of Positive Solutions of Semilinear Equations in* $\mathbb{R}^N$, Arch. Rational Mech. Anal., **81**(1983), 181-197.

[11] C. Reinecke and G. Sweers, *A Positive Solution on* $\mathbb{R}^N$ *to a Equations of FitzHugh-Nagumo Type*, J.Differential Equations, **153**(1999), 292-312.

[12] C. Reinecke and G. Sweers, *Existence and uniqueness of solution on bounded domains to a FitzHugh-Nagumo type elliptic system*, Pacific Journal of Mathematics, **197**(2001), 183-211.

[13] W.C. Troy, *Symmetry properties of elliptic equations*, J.Differential Equations, **42**(1981), 400-413.