

# 超臨界指数をもつ半線形放物型方程式の 解の挙動について

溝口紀子 (東京学芸大学)

$p > 1$ ,  $u_0 \in L^\infty(\mathbf{R}^N)$  とし, 次の半線形拡散方程式の初期値問題を考える:

$$(P) \quad \begin{cases} u_t = \Delta u + u^p & \text{in } \mathbf{R}^N \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = u_0(x) \geq 0 & \text{in } \mathbf{R}^N \end{cases}$$

(P) の解  $u$  に対して  $\limsup_{t \nearrow T} |u(t)|_\infty = +\infty$  が成り立つとき,  $u$  は時刻  $T$  で爆発するという. (P) の解  $u$  が  $t = T < \infty$  で爆発するとき,  $t > T$  に対して  $u \equiv \infty$  であるような爆発は完全爆発, そうでないような爆発は不完全爆発と呼ばれる. Baras-Cohen の結果より,  $p$  が Sobolev の埋め込み定理の意味で subcritical, 即ち,  $(N-2)p < N+2$  ならば完全爆発しか起こらない. 一方, Ni-Sacks-Tavantzis は,  $p \geq (N+2)/(N-2)$  の場合に 凸領域における (P) の方程式に対する Cauchy-Dirichlet 問題の  $L^1$  での時間大域解で  $L^\infty$  で非有界であるようなものを得た. ここで,  $u \in C([0, T]; L^1(\Omega))$ ,  $u \in L^p(\Omega_T)$  で, 任意の  $0 \leq s < t \leq T$  と  $\partial\Omega \times (s, t)$  で  $\rho(x, t) = 0$  をみたす  $\forall \rho \in C^2(\overline{\Omega_T})$  に対して

$$\int_s^t \int_\Omega \{u\rho_t + \phi(u)\Delta\rho + u^p\rho\} dx dt - \int_\Omega [u\rho]_s^t dx = 0$$

が成り立つとき,  $u$  を  $[0, T]$  における  $L^1$  の意味での解と定義し, 特に,  $T = \infty$  ならば,  $L^1$  の意味での時間大域解と呼ぶ. 但し,  $\Omega_T = \Omega \times (0, T)$  とする. その後, Galaktionov-Vazquez は,  $p$  が supercritical である値より小さい場合には この解は不完全爆発をしていることを示し, 初期値問題に対しても同様の結果が成り立つことが分かっている. しかしながら, 不完全爆発した解が爆発時刻後どのようにふるまうかについてはほとんど知られていない. この講演では, 爆発した後すぐに古典解になりそのまま時間大域的に存在し時刻無限大でいろいろな挙動をする解や, 1度爆発した後すぐに古典解になり再度爆発するような解が存在することを示す.