

ポアソン・アンダーソンモデルのスペクトルについて

中野史彦（東北大学理学研究科）

概要

本講演は安藤和典氏（東京電機大学）・岩塚 明氏（京都工芸繊維大学）による結果の紹介である。ポアソン型ランダムポテンシャルを持つシュレーディンガー作用素の自己共役性、スペクトル集合の同定について述べる。

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ を確率空間とし、次で与えられる $L^2(\mathbf{R}^d)$ 上のシュレーディンガー作用素の族を考える。

$$H_\omega = -\Delta + V_\omega(x), \quad V_\omega(x) = \sum_{j=1}^{\infty} q_j(\omega) f(x - X_j(\omega)), \quad \omega \in \Omega.$$

仮定

(1) $f \not\equiv 0$ は実数値で $\text{supp } f$ はコンパクトかつ $f \in L^p(\mathbf{R}^d)$. ここで、 $p > p(d)$ であり、

$$p(d) = \begin{cases} 2, & (d \leq 3), \\ \frac{d}{2}, & (d \geq 4). \end{cases}$$

(2) $\{q_j(\omega)\}_{j=1}^{\infty}$ は独立同分布な実数値確率変数で $\mathbf{E}[|q_1(\omega)|^r] < \infty$. 但し、

$$r > \max \left\{ 1, \frac{pd}{2(p - p(d))} \right\}.$$

(3) $\{X_j(\omega)\}_{j=1}^{\infty}$ は $\{q_j(\omega)\}_{j=1}^{\infty}$ と独立で、平均測度 $\rho\mu(dx)$ ($\rho > 0$, μ はルベーグ測度) を持つポアソン配置である。すなわち、

(i) $E_1, E_2, \dots, E_n (\subset \mathbf{R})$ を互いに素なボレル集合とすると、 $\#\{\{X_j(\omega)\}_{j=1}^{\infty} \cap E_k\}$, $k = 1, 2, \dots, n$ は互いに独立な確率変数、

(ii) $E (\subset \mathbf{R})$ を有界ボレル集合とするとき

$$\mathbf{P} \left(\#\{\{X_j(\omega)\}_{j=1}^{\infty} \cap E\} = n \right) = \frac{(\rho\mu(E))^n}{n!} e^{-\rho\mu(E)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

注意 1

(1) H_ω は原子が格子構造をとらずにランダムに配列しているような非晶質物質中の量子力学的粒子の状態を記述している。

(2) $\text{supp } f$ がコンパクトであるという条件は、 H_ω の自己共役性の証明、及びスペクトルの同定に使われる admissible potential の議論において用

いられる。

(3) $\{q_j(\omega)\}_{j=1}^\infty$ を決定的にとることもある。定理 2 の証明はこちらの方が難しい。

定理 1 H_ω は確率 1 で $C_0^\infty(\mathbf{R}^d)$ 上本質的自己共役である。

証明は、ボレル・カンテリの補題を用いて確率 1 の $\omega \in \Omega$ に対して $V_\omega(x)$ の遠方における評価を行い、本質的自己共役性であるための十分条件を与える Faris-Lavine の定理を用いることによって行われる。

H_ω はエルゴード的である。実際、任意の $x \in \mathbf{R}^d$ に対して Ω 上の保測変換 $T^x : \Omega \rightarrow \Omega$ が存在して、 $U_x f(\cdot) = f(\cdot - x)$ とすると、

$$U_x^{-1} H_\omega U_x = H_{T^x \omega}$$

が成立ち、 $\{T^x\}_{x \in \mathbf{R}^d}$ はエルゴード的である。このとき、ある閉集合 $\Sigma (\subset \mathbf{R})$ が存在して

$$\sigma(H_\omega) = \Sigma, \quad \text{a.s.}$$

となることはよく知られている。

定理 2 $\text{supp } P_q \subset (0, \infty)$ とし、 $d = 2$ のときは更に $f \in C_0(\mathbf{R}^d)$ と仮定すると

$$\Sigma = \begin{cases} [0, \infty), & (f_- \equiv 0) \\ \mathbf{R}, & (\text{otherwise}). \end{cases}$$

但し、 P_q は $q_1(\omega)$ の分布である。

注意 2

$\text{supp } P_q \subset (-\infty, 0)$ であるときは、定理 2 の主張において f_- を f_+ で置き換えたものが成立つ。 $\text{supp } P_q \cap (0, \infty) \neq \emptyset$ かつ $\text{supp } P_q \cap (-\infty, 0) \neq \emptyset$ であるときは $\Sigma = \mathbf{R}$ 。

証明は、まず Kirsch-Martinelli による admissible potential の理論を用いて Σ の 1 つの表現を得る。 $f_- \equiv 0$ の場合の定理 2 の主張は、これよりただちに従う。 $f_- \not\equiv 0$ であるときは、ある $b \in \Sigma^c \cap (-\infty, 0)$ が存在すると仮定する。admissible potential のある族において、対応するシュレーディンガー作用素の b より小さい固有値の数が一定値をとることを利用し、Weyl 型の固有値の漸近分布の評価を用いて矛盾を導く。