

シュレーディンガー型作用素の Sobolev estimate について

神戸市立高専・菅野 聡子

2005.1.22

$V(x)$ を非負のポテンシャルとし, $\mathbf{R}^n$ 上で作用素 $H_2 = (-\Delta)^2 + V^2$ を考える. ここで $V(x)$ は多項式を含むような, 以下の Reverse Hölder class に属するものとする. 以下 $B_r(x)$ は x を中心とする半径 r の球を表す.

定義 1 (Reverse Hölder class) $V \geq 0$ とする.

(1) $1 < p < \infty$ に対し $V \in (RH)_p$ とは, $V \in L^p_{loc}(\mathbf{R}^n)$ であって, ある定数 C が存在して

$$\left(\frac{1}{|B_r(x)|} \int_{B_r(x)} V(y)^p dy \right)^{1/p} \leq \frac{C}{|B_r(x)|} \int_{B_r(x)} V(y) dy \quad (1)$$

すべての $x \in \mathbf{R}^n$ と $0 < r < \infty$ に対して成り立つときにいう.

(2) $V \in (RH)_\infty$ であるとは, $V \in L^\infty_{loc}(\mathbf{R}^n)$ であって, ある定数 C が存在して

$$\|V\|_{L^\infty(B_r(x))} \leq \frac{C}{|B_r(x)|} \int_{B_r(x)} V(y) dy \quad (2)$$

がすべての $x \in \mathbf{R}^n$ と $0 < r < \infty$ に対して成り立つときにいう.

H_2 を含むシュレーディンガー型作用素に対して次の評価が成り立つ.

定理 1 $n \geq 5$ とする.

(1) $j = 0, 1, 2, 3$ とする. $V \in (RH)_{n/2}$ とし, ある定数 C が存在して $V(x) \leq C m(x, V)^2$ が成り立つとする. ここで

$$\frac{1}{m(x, V)} = \sup \left\{ r > 0 : \frac{r^2}{|B_r(x)|} \int_{B_r(x)} V(y) dy \leq 1 \right\} \quad (3)$$

である. そのとき, ある定数 C_j が存在して

$$\|V^{2-j/2} \nabla^j H_2^{-1} f\|_{L^p(\mathbf{R}^n)} \leq C_j \|f\|_{L^p(\mathbf{R}^n)} \quad (4)$$

が成り立つ. ここで $1 < p \leq \infty$ である.

(2) $V \in (RH)_{n/2}$ とし, ある定数 C が存在して $V(x) \leq Cm(x, V)^2$ が成り立つとする. そのとき, ある定数 C' が存在して

$$\|\nabla^4 H_2^{-1} f\|_{L^p(\mathbf{R}^n)} \leq C' \|f\|_{L^p(\mathbf{R}^n)} \quad (5)$$

が成り立つ. ここで $1 < p < \infty$ である.

注意 1 $V \in (RH)_\infty$ ならば $V(x) \leq Cm(x, V)^2$ である.

定理 1 は, 次の基本解の評価を用いて示せる. H_2 の基本解を $\Gamma_{H_2}(x, y)$ で表す.

定理 2 N を正の整数とし, $V \in (RH)_{n/2}$, $n \geq 5$ とする. そのとき, ある定数 C_N が存在して

$$(0 \leq) \Gamma_{H_2}(x, y) \leq \frac{C_N}{\{1 + m(x, V)|x - y|\}^N} \cdot \frac{1}{|x - y|^{n-4}} \quad (6)$$

が成り立つ.

定理 2 は $H_1 = -\Delta + V$ に関する評価を用いて示せる. さらに, 次のことがいえる.

定理 3 $V \in C^5(\mathbf{R}^n)$, $n \geq 5$ とする. また, $V \in (RH)_{n/2}$ とし, ある定数 C が存在して

$$|\nabla^j V(x)| \leq Cm(x, V)^{j+2}, \quad j = 1, 2, 3, 4, 5. \quad (7)$$

が成り立つとする. そのとき $\nabla^4 H_2^{-1}$ はカルデロン・ジグムント作用素である.

定理 3 を示すためには

$$|\nabla^4 \Gamma_{H_2}(x, y)| \leq \frac{C}{|x - y|^n}, \quad |\nabla^5 \Gamma_{H_2}(x, y)| \leq \frac{C}{|x - y|^{n+1}}$$

が成り立つことを示せばよい. 実際, 次のより強い評価が成り立つ.

定理 4 $V \in C^4(\mathbf{R}^n)$, $n \geq 5$ とする. また, $V \in (RH)_{n/2}$ とし, ある定数 C が存在して $|\nabla^j V(x)| \leq Cm(x, V)^{j+2}$, $j = 1, 2, 3, 4$. が成り立つとする. そのとき, すべての正の整数 N に対してある定数 C_N が存在して

$$|\nabla^4 \Gamma_{H_2}(x, y)| \leq \frac{C_N}{\{1 + m(x, V)|x - y|\}^N} \cdot \frac{1}{|x - y|^n}. \quad (8)$$

が成り立つ.

定理 5 定理 3 の仮定を仮定する. そのとき, すべての正の整数 N に対してある定数 C_N が存在して

$$|\nabla^5 \Gamma_{H_2}(x, y)| \leq \frac{C_N}{\{1 + m(x, V)|x - y|\}^N} \cdot \frac{1}{|x - y|^{n+1}}. \quad (9)$$

が成り立つ.