

Uniqueness in the Cauchy problem for systems with partial analytic coefficients

Mitsuji Tamura

June 18, 2004

Cauchy 問題の解の一意性に於いて、その係数が解析的か C^1 かによってその様相が大きく変わることは良く知られている。[1] で Alinhac-Baouendi は timelike な初期曲面においては 0 次の C^1 の摂動を許せば解の一意性が崩れることを示した、その後 Tataru は [3] に於いて partial analytic という仮定の下で timelike な初期曲面においても解の一意性が成り立つことを示した。我々はこの結果を [2] の手法を用いて偏微分方程式系に拡張し以下の定理を示したので報告する。

n_a, n_b を非負整数、 $n = n_a + n_b$, 1 とし $x \in \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n_a} \times \mathbb{R}^{n_b}$ を $x = (x_a; x_b); \gg = (\gg_a; \gg_b)$ とする。 $P(x; D_x) = P(x_a; x_b; D_{x_a}; D_{x_b}) = ((p_{ij}(x; D_x))_{1 \leq i, j \leq n})$ を C^1 -係数を持つ m 次微分作用素系とし、その principal-part を $P_m(x; \gg)$ とかく。

Theorem 0.1

$P(x; D_x)$ の係数は 0 の近傍で x_a に関して解析的であるとし、 $P_m(x; \gg)$ は

1. 任意の $\gg_b \in \mathbb{R}^{n_b}$ に対して

$$\det P_m(0; 0; \gg_b) \neq 0 \quad (1)$$

2. 任意の $\gg_b \in \mathbb{R}^{n_b}$ に対して

$$\det P_m(0; i_a^0(0); i_b^0(0) + \gg_b) \neq 0 \quad (2)$$

を満たすとする、この時次が成り立つ

$u \in C^1(V)^N$ が

$$\begin{cases} P(x; D_x)u(x) = 0; & x \in V \\ \text{supp } u \subset \{x \in V : |x| \leq \rho\} \end{cases}$$

を満たすならば、ある 0 の近傍 W がとれて、 u は W で恒等的に 0 である。

この定理の典型的な応用例としては、timelike な初期曲面を持つ弾性方程式の解の一意性などがある、またこの定理は Holmgren の一意性の定理の偏微分方程式系への拡張にもなっている

References

- [1] S.Alinhac-M.S.Baouendi:A non uniqueness result for operators of principal type, Math.Z.220, 561-568(1995)
- [2] L.Robiano-C.Zuily:Uniqueness in the Cauchy problem for operators with partially holomorphic coefficients, Invent.Math.131, 493-539(1998)
- [3] D.Tataru:Unique continuation for solutions to PDE's:between Hörmander's theorem and Holmgren's theorem, Comm on P.D.E.20, 855-884(1995)