

穴のあいた領域における磁場をもつ Schrödinger 作用素とその周辺

- Poincaré 不等式と関連した問題 -

金沢大学大学院 自然科学研究科 数物科学専攻

学籍番号 0313011018 佐藤 貴彰

平成 17 年 2 月 26 日

はじめに, 本論文は, 様々な条件での Poincaré 不等式に関する考察を, 主に E. H. Lieb, R. Seiringer and J. Yngvason [6] に基づいて行った総合報告である. 本論文では, Poincaré 不等式を一般的な有界連結な領域 Ω からある可測集合 Γ をぬいた穴があいている集合 Λ の場合 ($\Lambda = \Omega \setminus \Gamma$) と, 磁場をもつ Schrödinger 作用素 $-(\nabla + iA)^2$ の場合に拡張する問題を考察する.

1 Poincaré 不等式の様々な一般化

定理 1.1 (Generalized Poincaré inequality)

g を $L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)$, $\int_{\Omega} g = 1$, $1 \leq q \leq \infty$ を

$$\begin{cases} \max \left\{ 1, \frac{qn}{n+q} \right\} \leq p < \infty & \text{if } q < \infty \\ n < p \leq \infty & \text{if } q = \infty \end{cases}$$

とする. また, $\tilde{q}_n = \max \left\{ 1, \frac{qn}{n+q} \right\}$ とする.

このとき, $1 \leq q < \infty$ ならば, p, q, g, Ω のみに依存した定数 $S^{p,q} > 0$ が存在して, 任意の $f \in W^{1,p}(\Omega)$ に対して次の不等式が成り立つ.

$$\left\| f - \int_{\Omega} fg \right\|_{L^q(\Omega)} \leq S^{p,q} \left[\|\nabla f\|_{L^p(\Lambda)} + |\Omega|^{\frac{1}{p} - \frac{1}{\tilde{q}_n}} \|\nabla f\|_{L^{\tilde{q}_n}(\Gamma)} \right] \quad (1.1)$$

$q = \infty$ ならば, $S^{p,q}$ を $\hat{S}^{p,r}$, $\tilde{q}_n$ を r , に変えたもので, (1.1) 式が任意の $f \in W^{1,p}(\Omega)$ に対して成り立つ. ここで r は $n < r \leq p \leq \infty$, $\hat{S}^{p,r} = S_{p,\infty} |\Omega|^{\frac{1}{r} - \frac{1}{p}}$ とする.

定義 1.1 ($E_A^{p,q}$)

$E_A^{p,q}$ は Schrödinger 作用素 $-(\nabla + iA)^2$ の最低固有値に関連して次のように定義する.

$$E_A^{p,q} \stackrel{\text{def}}{=} \inf \left\{ \frac{\|(\nabla + iA)f\|_{L^p(\Omega)}}{\|f\|_{L^q(\Omega)}} \mid f \in W^{1,p}(\Omega), f \neq 0 \right\}$$

また, $M_A^{p,q}$ を基底状態の $f \in W^{1,p}(\Omega)$ の集合と定義し, ground state manifold と呼ぶ.

定理 1.2 (Poincaré inequality with vector field)

$1 \leq q < \infty$, $\max \left\{ 1, \frac{qn}{n+q} \right\} < p \leq \infty$, $0 < \delta \leq 1$ とする.

このとき, δ, p, q, Ω のみに依存したある定数 $S_{\delta}^{p,q} > 0$ が存在して, $\delta \|f\|_{L^q(\Omega)} \leq \inf_{\phi \in M_A^{p,q}} \|f - \phi\|_{L^q(\Omega)}$

をみたす任意の $f \in W^{1,p}(\Omega)$ に対して次の不等式が成り立つ.

$$\|f\|_{L^q(\Omega)} \leq S_{\delta}^{p,q} [\|(\nabla + iA)f\|_{L^p(\Omega)} - E_A^{p,q} \|f\|_{L^q(\Omega)}]$$

定理 1.3 (Poincaré inequality in punctured domains)

$1 \leq q \leq \infty$, $\max\{1, \frac{qn}{n+q}\} < p \leq \infty$, $0 < \delta \leq 1$ とする. また, $r \in \mathbb{R}^n$ を

$$\begin{cases} r = \max\{1, \frac{qn}{n+q}\} & \text{if } 1 \leq q < \infty \\ r > n & \text{if } q = \infty \end{cases}$$

をみたす任意の実数とする.

このとき, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $A, \delta, p, q, \Omega, \varepsilon$ のみに依存した定数 $C > 0$ が存在して, $\delta \|f\|_{L^q(\Omega)} \leq \inf_{\phi \in M_A^{p,q}} \|f - \phi\|_{L^q(\Omega)}$ をみたす任意の $f \in W^{1,p}(\Omega)$ に対して次の不等式が成り立つ.

$$\|(\nabla + iA)f\|_{L^p(\Lambda)} + C\|(\nabla + iA)f\|_{L^r(\Gamma)} \geq \left(\frac{1}{S_\delta^{p,q} + \varepsilon} + E_A^{p,q} \right) \|f\|_{L^q(\Omega)}$$

系 1.1

定理 1.3 と同様の仮定の下で次の不等式が成り立つ.

$$\|(\nabla + iA)f\|_{L^p(\Lambda)} + C|\Gamma|^{\frac{1}{r}-\frac{1}{p}}\|(\nabla + iA)f\|_{L^p(\Gamma)} \geq \left(\frac{1}{S_\delta^{p,q} + \varepsilon} + E_A^{p,q} \right) \|f\|_{L^q(\Omega)}$$

2 $-(\nabla + iA)^2$ のスペクトル

定義 2.1 (スペクトル E_k)

E_k, ϕ_k をそれぞれ $L^2(\Omega)$ での $-(\nabla + iA)^2$ の固有値, 固有関数とする. つまり基底状態の固有値 $E_A^{2,2} = \sqrt{E_1}$ に対して E_{k+1} を帰納的に次のように定義する.

$$E_{k+1} \stackrel{\text{def}}{=} \inf \left\{ \|(\nabla + iA)f\|_{L^2(\Omega)}^2 \mid \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 = 1, \int_\Omega f \phi_j = 0 \text{ for } j = 1, 2, \dots, k \right\}$$

定理 2.1

任意の $E \in \mathbb{R}$ に対して, Schrödinger 作用素 $-(\nabla + iA)^2$ の固有値の数は有限である.

定理 2.2

$\dim(M_A^{2,2}) > 1$ とできる場合がある.

3 参考文献

- [1] E.H.Lieb and M.Loss, Analysis, second edition, Amer. Math. Soc., Providence, RI(2001).
- [2] R.A.Adams, Sobolev Space, Academic Press, New York(1975).
- [3] M.Reed and B.Simon, Methods of Modern Mathematical Physics, Fourier Analysis, Self-adjointness, Academic Press, (1975).
- [4] 熊ノ郷 準, 偏微分方程式, 共立数学講座 14, (2001).
- [5] 溝畑 茂, 偏微分方程式, 岩波書店, (1986).
- [6] E.H.Lieb, R.Seiringer and J.Yngvason, Poincaré inequalities in punctured domains, Ann. Math. 158(2003), 1067-1080.