

多次元画像処理における平均曲率流モデル: その数学解析と数値実験

平田大介 (東京理科大学理工・学振 (PD))

序

測定器 (例: CT, MRI, 超音波, カメラ) により、高解像度の 3 次元 (resp. 2 次元) 画像データが得られたとする、さらにそこから興味ある対象物と覚しき超曲面 (resp. 等高線) を抽出できたとして、その曲面が複雑で noisy な場合、その複雑に入り組んだ箇所を滑らかにしたい、これが本研究のモチベーションである。正確には、noisy なところは局所的に滑らかな処理 (smoothing operation) を施すと同時に、一方ではその大域的な幾何学的特徴はできるかぎり損なうことなく保持しておきたい (shape preservation)。ここで、2 つの要求は凡そ相反する過程と考えられるゆえに、所期の処理結果を得るには様々な工夫を要することになる。

本講演では、平均曲率流を基ついた多次元画像処理のモデルを提示し、その初期値問題を解析する。またいくつかの数値実験も紹介する。

準備

X は n 次元微分可能多様体 M^n から Euclid 空間 $\mathbb{R}^{n+1}$ に埋め込まれた:

$$X : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$$

滑らかで閉じた n 次元超曲面とし、誘導計量 $g = (g_{ij})$ を備えたものとする。

σ_X を $\mathbb{R}^{n+1}$ 上の特性関数 (characteristic function) で、次のように定義する:

$$\sigma_X(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in \text{Ext}(X), \\ 0 & \text{if } x \in X, \\ -1 & \text{if } x \in \text{Int}(X), \end{cases} \quad (1)$$

$\text{Ext}(X)$ (resp. $\text{Int}(X)$) は X に関する外部領域 (resp. 内部領域) である。

χ を $\{-1, 0, 1\}$ 上の 2 値関数 (binary function):

$$\chi(-1) = 1, \quad \chi(0) = \chi(1) = 0 \quad (2)$$

とする。

$\{e^{\tau\Delta}\}_{\tau \geq 0}$ を X 上の熱半群とする:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \Delta u \quad \text{on } X \times (0, \infty), \quad u|_{t=0} = u_0,$$

ここで、 Δ は X 上の Laplace-Beltrami 作用素である。

モデル

ある超曲面 (X_0, g_0) が与えられたとき, X_0 に付随する超曲面 X のエネルギー汎関数 $E(X; X_0)$ を導入する:

$$E(X; X_0) := \int_X G(|\tilde{\nabla}(e^{\tau\tilde{\Delta}} H_0)|^2) dA + K \left[\int_{\mathbb{R}^{n+1}} \chi(\sigma_X \sigma_{X_0}) dx \right]^{\frac{n}{n+1}}, \quad (3)$$

ここで,

- $\tilde{\nabla}$; the gradient operator on X_0 , and $|\tilde{\nabla}u|^2 = \sum g_0^{ij} D_i u D_j u$,
- $\tilde{\Delta}$; the Laplace-Beltrami operator on X_0 ,
- H_0 ; the mean curvature on X_0 ,
- $dA = \sqrt{|g|} d\xi^1 \dots d\xi^n$; the area element on X , where $|g| = \det(g_{ij})$,
- $G(s)$; a nonincreasing, positive, smooth function on $[0, \infty)$ with $G(0) = 1$,
- τ, K ; positive parameters.

$E(X; X_0)$ の第 2 項 (の括弧の中) を

$$\text{dist}(X, X_0) := \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \chi(\sigma_X \sigma_{X_0}) dx = \int_{\{\sigma_X \sigma_{X_0} = -1\}} dx$$

とおくと, その第一変分公式は, $\forall \phi \in C_0^\infty(X)$ と X の外向き法線ベクトル N によって

$$\delta_{\phi N} (\text{dist}(X, X_0)^{n/(n+1)}) = \frac{n}{n+1} \text{dist}(X, X_0)^{-1/(n+1)} \int_X \phi \sigma_{X_0} dA$$

となる. これを基にして, $E(X; X_0)$ の Euler-Lagrange 方程式の負の L^2 -勾配流 (gradient flow) を正則化した次の発展方程式を画像処理モデルとして提示する:

$$\frac{d}{dt} X(t) = - \left[G(|\tilde{\nabla}(e^{\tau\tilde{\Delta}} H_0)|^2) H + K \text{dist}(X, X_0)^{-1/(n+1)} \sigma_{X_0}^\epsilon \right] N, \quad (4)$$

ここで, $\sigma_{X_0}^\epsilon$ は σ_{X_0} を正則化したものである. 実際の画像処理では, 初期データとして劣化した原画像 X_0 をとり, (4) の離散化方程式により時間発展させ, 処理を施すことになる (multi-scale method).

解析

初期条件 $X(0) = X_0$ を満たし支配方程式 (4) によって動く滑らかに埋め込まれた閉超曲面の族

$$X : [0, T) \times M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}, \quad X(t) := X(M^n \times \{t\})$$

の存在について考える (初期値問題).

主定理: X_0 は $\mathbb{R}^{n+1}$ に埋め込まれた閉超曲面で $C^{2+\alpha}$ 級 ($0 < \alpha < 1$) とする. そのとき, ある時刻 $T > 0$ があって, 初期条件 $X(0) = X_0$ と支配方程式 (4) を満たす超曲面の族 $X = \{X(t); 0 \leq t \leq T\}$ で $C^{1+\alpha/2, 2+\alpha}([0, T] \times M^n)$ に属するものが一意に存在する. さらに $t > 0$ で $X(t)$ は C^∞ 級である.