反応拡散方程式系の時間大域解の存在・非存在について

五十嵐 威文（日本工業大学工学部　非常勤講師）

次の反応拡散方程式系の初期値問題 (IVPS) を考える。

$$
\text{(IVPS)} \begin{cases} u_t = \Delta u + t^{q_1}|x|^{\sigma_1}v^{p_1}, & \text{in } \mathbf{R}^n \times (0,\infty), \\ v_t = \Delta v + t^{q_2}|x|^{\sigma_2}u^{p_2}, & \text{in } \mathbf{R}^n \times (0,\infty), \\ u(x,0) = u_0(x) \geq 0, & \text{in } \mathbf{R}^n, \\ v(x,0) = v_0(x) \geq 0, & \text{in } \mathbf{R}^n, \end{cases}
$$

但し，$p_1, p_2 \geq 1$, $p_1p_2 > 1$, $q_1, q_2 \geq 0$, $\sigma_1, \sigma_2 \geq 0$, $u_0, v_0 \in BC(\mathbf{R}^n)$ とする。また，

$$
\alpha_1 = \frac{2(p_1+1)}{p_1p_2-1}, \quad \alpha_2 = \frac{2(p_2+1)}{p_1p_2-1}, \quad \delta_1 = \frac{\sigma_2 p_1 + \sigma_1}{p_1p_2-1}, \quad \delta_2 = \frac{\sigma_1 p_2 + \sigma_2}{p_1p_2-1},
$$

$$
\beta_1 = \frac{2(q_2p_1+q_1)}{p_1p_2-1}, \quad \beta_2 = \frac{2(q_1p_2+q_2)}{p_1p_2-1}
$$

とおく。

$a \geq 0$ に対し，次の関数空間を導入する:

$$
I^a = \left\{ \xi \in BC(\mathbf{R}^n); \xi(x) \geq 0, \limsup_{|x|\to\infty} |x|^a \xi(x) < \infty \right\},
$$

$$
I_a = \left\{ \xi \in BC(\mathbf{R}^n); \xi(x) \geq 0, \liminf_{|x|\to\infty} |x|^a \xi(x) > 0 \right\}。
$$

また，ノルム $\|\cdot\|_{\infty,a}$ を

$$
\|\xi\|_{\infty,a} := \sup_{x\in\mathbf{R}^n} \langle x \rangle^a |\xi(x)|
$$

と定義し，$\|\xi\|_{\infty,a} < \infty$ となるような L^∞-関数空間を L^∞_a とする。但し，$\langle x \rangle^a = (1+|x|^2)^{a/2}$ である。このとき，$I^a \subset L^\infty_a$ となる。さらに，$(u_0, v_0) \in I^{\delta_1} \times I^{\delta_2}$ とする。このとき，ある $T > 0$ に対して $\mathbf{R}^n \times (0,T)$ において (IVPS) の時間局所解 (u,v) が一意的に存在する。

Theorem 1 (Kirane-Qafsaoui [3]，時間大域解の非存在)
$\max\{\alpha_1+\delta_1+\beta_1, \alpha_2+\delta_2+\beta_2\} \geq n$ とする。このとき，(IVPS) は非自明な時間大域解 (u,v) をもたない。

Theorem 2 ([1], 時間大域解の存在)
$\max\{\alpha_1+\delta_1+\beta_1, \alpha_2+\delta_2+\beta_2\} < n$ とする。また，$(u_0, v_0) \in I^{a_1} \times I^{a_2}$ とする。このとき，$a_1 > \alpha_1+\delta_1+\beta_1$，$a_2 > \alpha_2+\delta_2+\beta_2$ ならば，十分小さな $\|u_0\|_{\infty,a_1} + \|v_0\|_{\infty,a_2}$ に対して (IVPS) は時間大域解 (u,v) をもつ。

Theorem 2 において $\max\{\alpha_1+\delta_1+\beta_1, \alpha_2+\delta_2+\beta_2\} < n$ のときに $a_1 > \alpha_1+\delta_1+\beta_1$ かつ $a_2 > \alpha_2+\delta_2+\beta_2$ ならば，初期データ u_0 と v_0 が十分小さいときに時間大域解をもつという結果であったが，

逆に，$a_1 < \alpha_1+\delta_1+\beta_1$ または $a_2 < \alpha_2+\delta_2+\beta_2$ の場合や初期データ u_0 または v_0 が十分大きい場合については以下の結果を得ることができた:

Theorem 3 (時間大域解の非存在)
$\max\{\alpha_1+\delta_1+\beta_1, \alpha_2+\delta_2+\beta_2\} < n$ とする。また，$\sigma_1 < n(p_1-1)$, $\sigma_2 < n(p_2-1)$ とする。このとき，$u_0 \in I_{a_1}$ に対して $a_1 < \alpha_1+\delta_1+\beta_1$，または，$v_0 \in I_{a_2}$ に対して $a_2 < \alpha_2+\delta_2+\beta_2$，または，ある $\nu_0 > 0$ とある十分大きな $C > 0$ に対して $u_0(x) \geq Ce^{-\nu_0|x|^2}$ または $v_0(x) \geq Ce^{-\nu_0|x|^2}$ ならば，(IVPS) は時間大域解 (u, v) をもたない。

Theorems において，$q_1 = q_2 = 0$, $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$ の場合は Mochizuki [4] の結果に帰着され，$q_1 = q_2 = 0$, $\sigma_1 < n(p_1-1)$, $\sigma_2 < n(p_2-1)$ の場合は Mochizuki-Huang [5] の結果に帰着される。

References

[1] T.Igarashi, Existence and nonexistence of global solutions in time and the life span of solutions for reaction-diffusion equations, 日本大学大学院理工学研究科数学専攻博士論文, 2005 年 1 月.

[2] 五十嵐 威文, 反応拡散方程式系の時間大域解の存在・非存在について, 日本数学会春の年会 函数方程式論分科会講演アブストラクト, 2005 年 3 月.

[3] M. Kirane and M.Qafsaoui, Global nonexistence for the Cauchy problem of some nonlinear reaction-diffusion systems, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* **268** (2002), 217-243.

[4] K.Mochizuki, Blow-up, life-span and large time behavior of solutions of a weakly coupled system of reaction-diffusion equations, *Adv. Math. Appl. Sci.* **48**, World Scientific 1998, 175-198.

[5] K.Mochizuki and Q.Huang, Existence and behavior of solutions for a weakly coupled system of reaction-diffusion equations, *Methods and Applications of Analysis* **5** (2) 1998, 109-124.