

Optimal rate of convergence of the Bence-Merriman-Osher algorithm for motion by mean curvature

石井 克幸 (神戸大学海事科学部)

$\{\Gamma_t\}_{t \geq 0}$ を $\mathcal{R}^N$ に埋め込まれたコンパクトな超曲面の族とする. Γ_t が次の方程式に従って運動しているとき, $\{\Gamma_t\}_{t \geq 0}$ は平均曲率流と呼ばれる.

$$V = \kappa \quad \text{on } \Gamma_t, \quad t > 0.$$

ここで $V = V(t, x)$ は $x \in \Gamma_t$ における Γ_t の法線方向速度, $\kappa = \kappa(t, x)$ は $x \in \Gamma_t$ における Γ_t の平均曲率 (の $(N-1)$ 倍) である. この方程式は平均曲率流方程式とよばれる.

平均曲率流については数学的研究はもちろんのこと, 応用面からの動機で数値計算に関する研究も盛んである. 本講演では Bence, Merriman, Osher の 3 氏によって考案された数値計算アルゴリズムについて考察する. まず, 彼らのアルゴリズムを述べよう. $C_0 \subset \mathcal{R}^N$ を $\partial C_0 = \Gamma_0$ となるコンパクト集合とし, $u^0 = u^0(t, x)$ を以下のような熱方程式に対する初期値問題の解とする.

$$\begin{cases} u_t = \Delta u & \text{in } (0, +\infty) \times \mathcal{R}^N, \\ u(0, x) = \begin{cases} 1 & x \in C_0, \\ -1 & x \in \mathcal{R}^N \setminus C_0. \end{cases} \end{cases}$$

$h > 0$ を時間刻み幅とし. C_1 を次のように定める.

$$C_1 = \{x \in \mathcal{R}^N \mid u^0(h, x) \geq 0\}.$$

以下, 帰納的にこの操作を繰り返すことによってコンパクト集合列 $\{C_k\}_{k=0,1,\dots}$ を構成する. 即ち, C_k が求まれば, それを用いて $u^k = u^k(t, x)$ を

$$\begin{cases} u_t = \Delta u & \text{in } (0, +\infty) \times \mathcal{R}^N, \\ u(0, x) = \begin{cases} 1 & x \in C_k, \\ -1 & x \in \mathcal{R}^N \setminus C_k, \end{cases} \end{cases}$$

の解とし C_{k+1} を

$$C_{k+1} = \{x \in \mathcal{R}^N \mid u^k(h, x) \geq 0\}.$$

とする. この集合列 $\{C_k\}_{k=0,1,\dots}$ を使って $\{C_t^h\}_{t \geq 0, h > 0}$ を

$$C_t^h = C_k \text{ if } kh \leq t < (k+1)h, \quad k = 0, 1, \dots$$

とおく. このとき, $h \rightarrow 0$ とすると

$$\partial C_t^h \longrightarrow \Gamma_t$$

となり, $\{\Gamma_t\}_{t \geq 0}$ は Γ_0 を初期曲面とする平均曲率流になる.

BMO アルゴリズムの数学的正当性の証明や拡張に関しては多くの結果がある. しかしながら, 収束の速さに関する研究は講演者の知る限りほとんど無かった. 今回は $\{\Gamma_t\}_{0 \leq t < T_0}$ がコンパクトで滑らかな平均曲率流の場合を考え, 以下の結果を得た.

Theorem 1 $\{\Gamma_t\}_{0 \leq t < T_0}$ をコンパクトで滑らかな平均曲率流とする. $\Gamma_0^h = \Gamma_0$ として $\Gamma_t^h = \partial C_t^h$ を上のアルゴリズムで構成した曲面とする. このとき, 各 $T < T_0$ に対して, $h_0 > 0, L_0 > 0$ が存在し, 次の評価が成り立つ.

$$\sup_{t \in [0, T]} d_H(\Gamma_t^h, \Gamma_t) \leq L_0 h \quad \text{for all } h \in (0, h_0).$$

ここで $d_H(A, B)$ は $A, B \subset \mathcal{R}^N$ に対する Hausdorff distance である.

次の定理より $\{\Gamma_t\}_{t \geq 0}$ が球対称の場合には, この評価は h のオーダーに関して最良であることもわかる. 簡単のため, $N = 2$ とする. Γ_0 を単位円周とし, Γ_t を曲率で動く平面内の円周とする. このとき Γ_t の半径は $\phi(t) := \sqrt{1 - 2t}$ であり, $t = 1/2$ で 1 点に収縮することに注意する. $\Gamma_0^h = \Gamma_0$ として $\Gamma_t^h = \partial C_t^h$ を上のアルゴリズムで構成した円周とし, その半径を $R_h(t)$ とする.

Theorem 2 各 $T < 1/2$ に対して, $h_1 > 0, L_1 > 0$ が存在し, 次の評価が成り立つ.

$$\sup_{t \in [0, T]} |R_h(t) - (\phi(t) - h\psi(t))| \leq L_1 h^{3/2} \quad \text{for } h \in (0, h_1),$$

$$\text{但し, } \psi(t) = -\frac{\log \phi(t)}{3\phi(t)}.$$