

On the L^∞ -global bounds for global solutions of some semilinear parabolic equations involving critical Sobolev exponent

石渡 通徳

津田塾大学数学・計算機科学研究所

本講演では次の半線型放物型方程式の (時間大域) 解に関する L^∞ -大域有界性について報告する:

$$(P) \quad \begin{cases} \partial u / \partial t = \Delta u + \lambda u + u|u|^{q-2} & \text{in } \Omega \times (0, \infty), \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \times (0, \infty), \\ u = u_0 & \text{in } \Omega \times \{0\}, \end{cases}$$

ここで $\lambda \in \mathbb{R}$, $q \in (2, 2^*]$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N \geq 3$) は有界領域, $u_0 \in L^\infty$ とする ($2^* = 2N/(N-2)$ は Sobolev の埋蔵 $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ の critical exponent).

(P) の解の各種ノルムの挙動の研究には [1] を始めとして多くのものがある. 劣臨界 ($q < 2^*$) の場合については,

- (a) Gagliardo-Nirenberg type の不等式と Sobolev type の埋め込みを巧妙に用いる方法 [2], または
- (b) blow up argument を用いる方法 [4]

により, 任意の初期値 u_0 に対して (P) の解は L^∞ で時間大域的に有界であることが示されている (方法 (b) は正値解に対してのみ有効).

しかしながら現在まで, 臨界 ($q = 2^*$) の場合については部分的な結果しか得られていない. これは劣臨界の場合に有効であった方法 (a), (b) を臨界の場合にそのまま適用しても, 意味のある結果が得られないためである. 特に [3] により Ω が ball, $\lambda = 0$ の場合には無限時間爆発を起こす時間大域解が存在することが知られているので, 臨界の場合には, 劣臨界の場合のような任意の初期値に対する有界性は期待できない. そのため, 臨界の場合の解の L^∞ -大域有界性については, 球対称性を仮定する以外には有効なアプローチはないといってよい.

本講演では (劣臨界, 臨界の双方の場合の) 時間大域解の L^∞ 有界性に対して変分法的な視点が有効であることを報告する. 以下の記号と用語を用いる.

- (P) に付随する Lyapunov 汎関数を $J(u) = \|\nabla u\|_2^2/2 - \lambda\|u\|_2^2/2 - \|u\|_q^q/q$ とする. 初期値 u_0 に対してある $c \geq 0$ があって, (P) の解 $u(t)$ は $\lim_{t \rightarrow \infty} J(u(t)) = c$ を満たすことが知られている.
- u を (P) の解とする. 「 J が $u(t)$ にそった Palais-Smale 条件 ((PS)-条件) を満たす」とは, $(dJ)_{u(t_n)} \rightarrow 0$ を満たす任意の列 $t_n \rightarrow \infty$ に対して $u(t_n)$ は $H_0^1(\Omega)$ での収束部分列を持つときをいう (dJ は H_0^1 における J の Frechét 微分を表す).

本講演での主結果は以下のとおりである.

Theorem 1

$q \in (2, 2^*]$ とする. (P) の時間大域解 u が L^∞ で時間大域的に有界であることと, J の u に沿った (PS)-条件が成り立つことは同値である. ■

J が (PS)-条件を満たす十分条件として

- (1) $q < 2^*$,
- (2) $q = 2^*$, $N \geq 4$ かつ $c < S^{N/2}/N$ (ただし S は Sobolev の不等式の最良定数),

などが知られている. これより直ちに以下の系が従う.

Corollary 1

- (1) または (2) の場合に u は L^∞ で時間大域的に有界である. ■

また Theorem 1 によると, [3] にあるような無限時間爆発を起こす解に沿って, J の (PS)-条件は破れている. 従って u が無限時間爆発を起こすメカニズムは, J の u に沿った (PS)-条件の破れを引き起こすメカニズムと密接に関係することがわかる. これは無限時間爆発の発生メカニズムに関するひとつの観点を与えており, 興味深いと思われる.

参考文献

- [1] ÔTANI, M., Existence and asymptotic stability of strong solutions of nonlinear evolution equations with a difference term of subdifferentials. *Colloq. Math. Soc. Janos Bolyai, Qualitative Theory of Differential Equations* **30** (1980), North-Holland, Amsterdam.
- [2] CAZENAVE, T., LIONS, P. L., Solutions globales d'équations de la chaleur semi lineaires. (French) [Global solutions of semilinear heat equations] *Comm. Partial Differential Equations* **9** (1984), 955-978.
- [3] GALAKTIONOV, V. A., KING, J. R., Composite structure of global unbounded solutions of nonlinear heat equations with critical Sobolev exponents. *J. Differential Equations* **189** (2003), 199-233.
- [4] GIGA, Y., A bound for global solutions of semilinear heat equations. *Comm. Math. Phys.* **103**, (1986), 415-421.