GROSS-PITAEVSKII 方程式の散乱理論

中西賢次（京都大学理学研究科数学教室）

これは Stephen Gustafson, Tai-Peng Tsai (University of British Columbia) との共同研究である。Gross-Pitaevskii 方程式

$$i\partial_t\psi + \Delta\psi = (|\psi|^2 - 1)\psi, \quad \psi : \mathbb{R}^{1+d} \to \mathbb{C} \tag{1}$$

の解の時間大域的挙動を考える。この方程式は Bose-Einstein 凝縮の Hartree（平均場）近似として得られ、超流動や超伝導のモデルとして調べられている。この場合、境界条件としては

$$|\psi| \to 1 \quad (|x| \to \infty) \tag{2}$$

が自然である。これは例えば $\psi(t,x)$ が x について $H^1(\mathbb{R}^d)$ の場合と比べて時間大域挙動に本質的な違いをもたらす。ただし $\psi = 1 + u$ とおくとエネルギーは

$$E(t) = \int |\nabla u|^2 + \frac{(|u|^2 - 2\operatorname{Re} u)^2}{2} dx = E(0) \tag{3}$$

なので $u(t) \in H^1$ は自然な解のクラスであり、実際 $d \le 3$ では初期値問題は $H^1(\mathbb{R}^d)$ で時間大域的に適切である [2]。また、$u = v(x-ct)$ (c は定ベクトル) の形の travelling vortex ring と呼ばれる解の存在も知られている [2, 1, 3] が、一般解の時間大域的な挙動は殆ど調べられていない。

ここでは時間大域解の漸近挙動を散乱理論の形で調べる。そのために次の変数変換を行う。

$$u \mapsto v := V^{-1}u := U^{-1}\operatorname{Re} u + i\operatorname{Im} u, \quad U := \sqrt{-\Delta(2-\Delta)^{-1}}. \tag{4}$$

これによって v に対する線形化方程式は L^2 保存になる（u はそうでない）

$$i\partial_t v - Hv = -iV^{-1}iF(Vv), \quad H = \sqrt{-\Delta(2-\Delta)}. \tag{5}$$

この問題の、通常の非線形 Schrödinger 方程式と比べての困難は、一つは定数解との相互作用が Fourier 空間での特異性 V^{-1} を引き起こし、非線形項の減衰評価に悪影響を及ぼす事。もう一つは、非線形 Schrödinger 方程式で分散性を引き出すのに重要な方程式の変換不変性（特にガリレイ変換・スケール変換）が失われている事である。我々は最初の問題点についてはほぼ完全に解決し、$d \ge 4$ での小さなデータに対する散乱作用素と、$d = 3$ での波動作用素を構成することに成功した。

Theorem 1. [4] $d \ge 4$, $s = d/2 - 1$, $|\sigma| \le (d-3)/2 - 1/d$ とすると $\|U^\sigma v(0)\|_{H^s}$ が十分小さい時 (5) の解 v は時間大域的に存在して次を満たす：

$$\|U^\sigma v(t)\|_{H^s} \lesssim \|U^\sigma v(0)\|_{H^s}, \quad U^\sigma e^{iHt}v(t) \to \exists v_\pm \in H^s \quad (t \to \pm\infty). \tag{6}$$

$d = 3$ では以下の空間を導入する：

$$\begin{aligned} &\|f\|_{L^s_b} = \sup_{T>0} T^s \|f\|_{L^{1/b}(T,\infty)}, \quad \|u\|_{St^s} = \|u\|_{L^\infty H^s \cap L^2 H^s_6}, \\ &X_\varepsilon := St^1 \cap L^{1/2-8\varepsilon}_{10\varepsilon} L_{1/3-\varepsilon}(\mathbb{R}^3), \quad \|\varphi\|_{A_\varepsilon} = \|e^{-iHt}\varphi\|_{X_\varepsilon}. \end{aligned} \tag{7}$$

Theorem 2. *$d=3$ and $0<\varepsilon$* 十分小のとき、$A_\varepsilon \ni \forall\varphi$ に対して、次を満たす (5) の時間大域解 v が一意に存在する。

$$\|v(t)-e^{-iHt}v_+\|_{X_\varepsilon(T,\infty)} \to 0 \quad (T\to\infty). \tag{8}$$

また $H^1 \cap L_{2/3+\varepsilon} \subset A_\varepsilon$.

なお、$\varepsilon=0$ の場合もノルムを次のように若干変更すれば小さいデータについては同様の結果が成り立つ。

$$\|u\|_{St^{s,2}} = \|u\|_{St^s \cap L^{4,2}H^s_{3/2}}, \quad \|u\|_{X^2_0} = \|u\|_{St^{1,2}\cap L_0^{1/2}L^3}, \quad \|\varphi\|_{A^2_0} = \|e^{-iHt}\varphi\|_{X^2_0} \tag{9}$$

証明の道具としては e^{-iHt} に対する L^p 減衰評価と Strichartz 評価を用いる。

Theorem 3. $\forall d\in\mathbb{N}$ について
(i) $2\le\forall q\le\infty$, $\forall s\in\mathbb{R}$, $q'=q/(q-1)$, $\sigma=1/2-1/q$ とおくと

$$\|e^{-itH}\varphi\|_{\dot B^s_{q,2}} \lesssim t^{-d\sigma}\|U^{(d-2)\sigma}\varphi\|_{\dot B^s_{q',2}}, \tag{10}$$

ただし $\dot B^s_{q,2}$ は斉次 *Besov* 空間。
(ii) $j=1,2$ について $s\in\mathbb{R}$, $2\le p_j,q_j\le\infty$, $2/p_j+d/q_j=d/2$, $s_j=\frac{d-2}{2}(1/2-1/q_j)$, $(p_j,q_j)\ne(2,\infty)$ とすると

$$\begin{aligned} &\|e^{-itH}\varphi\|_{L^{p_1}\dot B^s_{q_1,2}} \lesssim \|U^{s_1}\varphi\|_{H^s}, \\ &\left\|\int_{-\infty}^t e^{-i(t-s)H}f(s)ds\right\|_{L^{p_1}\dot B^s_{q_1,2}} \lesssim \|U^{s_1+s_2}f\|_{L^{p_2'}\dot B^s_{q_2',2}} \end{aligned} \tag{11}$$

これらは U の冪がなければ Schrödinger 方程式と同じになる。$d\ge3$ ではその分 $\xi=0$ の周りで得をする。これは特性曲面 $\tau=H(\xi)$ の曲率の大きさによる。
V^{-1} の特異性を取り除く鍵は次の変数変換である。

$$w=u+P|u|^2/2, \tag{12}$$

ただし P は滑らかな Fourier multiplier による高周波カットオフ。w の方程式は $u=u_1+iu_2$, $Q=I-P$ とおくと次のようになる。

$$\begin{aligned} &i\dot w = -\Delta w + 2\,\mathrm{Re}\,w + G_1 + iG_2, \\ &G_1 = (3-P)u_1^2 + Qu_2^2 + P\Delta|u|^2/2 + |u|^2u_1, \\ &G_2 = 2Q(u_1u_2) + \nabla P\cdot(u_2\nabla u_1 - u_1\nabla u_2) + Q(|u|^2u_2). \end{aligned} \tag{13}$$

References

[1] F. Bethuel, G. Orlandi, D. Smets, *Vortex rings for the Gross-Pitaevskii equation.* J. Euro. Math. Soc. **6** (2004), no. 1, 17–94.

[2] F. Bethuel and J. C. Saut, *Travelling waves for the Gross-Pitaevskii equation. I.* Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor. **70** (1999), no. 2, 147–238.

[3] D. Chiron, *Travelling waves for the Gross-Pitaevskii equation in dimension larger than two.* Nonlinear Anal. **58** (2004), no. 1-2, 175–204.

[4] Stephen Gustafson, Kenji Nakanishi and Tai-Peng Tsai, *Scattergin for the Gross-Pitaevskii equation.* to appear in Math. Res. Lett.