# 非定符号渦点系に関連する Trudinger-Moser 型不等式について[1]

大塚浩史 (木更津工業高等専門学校)
ohtsuka@nebula.n.kisarazu.ac.jp

澤田謙 (阪大院基礎工 D1)、鈴木貴 (阪大院基礎工)、高橋太 (東北大 COE フェロー) の各氏との共同研究による。

異なる符号の渦度をもつ渦点が混在している渦点系の、平均場極限で現れる汎関数の有界性を紹介する。有界性を表す不等式は、Trudinger-Moser 不等式の亜種と考えられるが、関連する偏微分方程式 (系) の解の詳細な解析を行うことで得られた。

## 問題並びに結果

$(M,g)$ を、境界のない向き付け可能なコンパクト 2 次元 $C^\infty$Riemann 多様体とする。この上の Sobolev 空間

$$E=\left\{w\in H^1(M);\int_M w=0\right\}$$

は、$<u,v>:=\int_M \nabla_g u\cdot\nabla_g v dv_g$ ($dv_g$ は体積要素) を内積とする Hilbert 空間になるが、$E$ 上で次の汎関数を考察する。

$$J_{\lambda_1,\lambda_2}(u)=\frac{1}{2}\int_M|\nabla_g u|^2dv_g-\lambda_1\log\int_M e^u dv_g-\lambda_2\log\int_M e^{-u}dv_g, \tag{1}$$

但し、$\lambda_1$、$\lambda_2$ は、非負定数とする。

有名な Trudinger-Moser 不等式 (多様体上は Fontana('93 Comment. Math. Helv.) による) から、汎関数

$$J_\lambda(u)=\frac{1}{2}\int_M|\nabla_g u|^2dv_g-\lambda\log\int_M e^u dv_g \quad (\,=J_{\lambda,0}(u)\,)$$

に対し、

$$\lambda\in[0,8\pi]\quad\Longrightarrow\quad\inf_{u\in E}J_\lambda(u)>-\infty$$

が知られている。これを用いると、

$$J_{\lambda_1,\lambda_2}(u)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{\lambda_1}{8\pi}-\frac{\lambda_2}{8\pi}\right)\int_M|\nabla_g u|^2dv_g+\frac{\lambda_1}{8\pi}J_{8\pi}(u)+\frac{\lambda_2}{8\pi}J_{8\pi}(-u)$$

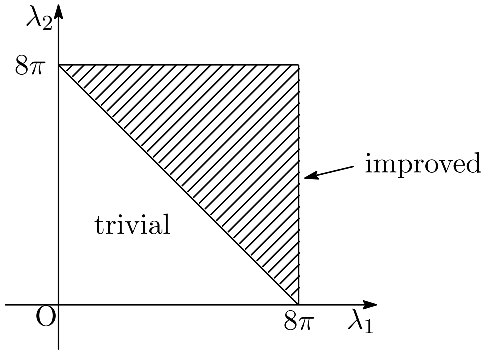
ゆえ、

$$1-\frac{\lambda_1}{8\pi}-\frac{\lambda_2}{8\pi}\geqq 0\ (\Leftrightarrow\ \lambda_1+\lambda_2\leqq 8\pi)\quad\Longrightarrow\quad\inf_{u\in E}J_{\lambda_1,\lambda_2}(u)>-\infty$$

は容易に得られる。これを次のように改善したのが、今回の結果である。

**Theorem 1.**

$$(\lambda_1,\lambda_2)\in[0,8\pi]\times[0,8\pi]\quad\Longrightarrow\quad\inf_{u\in E}J_{\lambda_1,\lambda_2}(u)>-\infty.$$




[1]於東京理科大学神楽坂解析セミナー (2005 年 5 月 28 日)

結論は最良である。実際、

$$\lambda > 8\pi \quad \Longrightarrow \quad \inf_{u \in E} J_\lambda(u) = -\infty$$

は容易に確認できる。Jensen の不等式より、任意の $u \in E$ に対し、

$$\frac{1}{|M|}\int_M e^u dv_g \geqq e^{\frac{1}{|M|}\int_M u dv_g} = e^0 = 1$$

が成立する ($|M|$ は $M$ の面積を表す) ので、

$$J_{\lambda_1,\lambda_2}(u) = J_{\lambda_2}(-u) - \lambda_1 \log \int_M e^u dv_g \leqq J_{\lambda_2}(-u) - \lambda_1 \log |M|$$

である。よって、

$$\lambda_2 > 8\pi \quad \Longrightarrow \quad \inf_{u \in E} J_{\lambda_1,\lambda_2}(u) = -\infty$$

が得られる。同様にして、$\lambda_1 > 8\pi$ の場合に $\inf_{u\in E} J_{\lambda_1,\lambda_2}(u) = -\infty$ も得られる。

## 証明について

(1) の Euler-Lagrange 方程式は、

$$-\Delta_g u = \lambda_1 \left( \frac{e^u}{\int_M e^u dv_g} - \frac{1}{|M|} \right) - \lambda_2 \left( \frac{e^{-u}}{\int_M e^{-u} dv_g} - \frac{1}{|M|} \right), \quad \int_M u dv_g = 0 \tag{2}$$

であるが、$v_1$、$v_2$ を

$$\begin{aligned} -\Delta_g v_1 &= \lambda_1 \left( \frac{e^u}{\int_M e^u dv_g} - \frac{1}{|M|} \right), \quad \int_M v_1 dv_g = 0 \\ -\Delta_g v_2 &= \lambda_2 \left( \frac{e^{-u}}{\int_M e^{-u} dv_g} - \frac{1}{|M|} \right), \quad \int_M v_2 dv_g = 0 \end{aligned}$$

の解とすると、$u = v_1 - v_2$ であり、$v_1$、$v_2$ は

$$\begin{aligned} -\Delta_g v_1 &= \lambda_1 \left( \frac{e^{v_1 - v_2}}{\int_M e^{v_1 - v_2} dv_g} - \frac{1}{|M|} \right), \quad \int_M v_1 dv_g = 0 \\ -\Delta_g v_2 &= \lambda_2 \left( \frac{e^{-v_1 + v_2}}{\int_M e^{-v_1 + v_2} dv_g} - \frac{1}{|M|} \right), \quad \int_M v_2 dv_g = 0 \end{aligned}$$

という方程式系の解とみなせる。

一般に、$A = (a_{ij}) \in GL(N, \mathbf{R})$、$\Lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_N)$ に対し、

$$-\Delta_g v_i = \lambda_i \left( \frac{e^{\sum_{j=i}^N a_{ij} v_j}}{\int_M e^{\sum_{j=i}^N a_{ij} v_j} dv_g} - \frac{1}{|M|} \right) \quad (i = 1, \ldots, N)$$

は (平均場形式の)Liouville system と呼ばれる。我々の問題は $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ という場合に相当する。近年、$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ である Liouville system が、戸田 system(の一つ) として詳しく調べられているが、我々の結果に類するものとして次が知られている。

**Theorem 2** (Jost-Wang (Commun. Pure Appl. Math. 54 (2001))). $A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ とする。このとき、

$$J^{A}_{\lambda_1,\lambda_2}(v_1, v_2) := \frac{1}{2}\sum_{1\leqq i,j\leqq 2}\int_M a_{ij}\nabla_g v_i\cdot\nabla_g v_j dv_g - \sum_{i=1}^{2}\lambda_i\log\int_M e^{\sum_{j=1}^{2} a_{ij}v_j}dv_g$$

に対し、

$$(2\lambda_1, 2\lambda_2)\ (\ = (a_{11}\lambda_1, a_{22}\lambda_2)\ ) \in [0, 8\pi]\times[0, 8\pi] \quad\Longrightarrow\quad \inf_{(v_1,v_2)\in E\times E} J_{\lambda_1,\lambda_2}(v_1, v_2) > -\infty.$$

証明はこの結果の手法を踏襲したが、戸田 system に関する我々の結果 (Chae-O-Suzuki, to appear in Calc. Var.) で用いた手法により簡略化できた。同様の手法で多くの場合に Theorem 2 と同様の結論が得られるが、詳細は現在精査中である。類似の結果として、Shafrir-Wolansky によるもの (preprint) があるが、証明方法は異なる。

## 渦点系の統計力学について[2]

$\Omega$ を $\mathbf{R}^2$ の境界が滑らかな単連結有界領域とする。$\Omega$ 内の $N$ 個の渦点系 (位置 $x_i$ に渦度 $\alpha_i$ の渦点、$i = 1,\ldots,N$) の Hamiltonian $H$ は、

$$H(x_1,\ldots,x_N) := \frac{1}{2}\sum_{\substack{1\leqq i,j\leqq N\\ i\neq j}}\alpha_i\alpha_j G_\Omega(x_i,x_j) + \frac{1}{2}\sum_{1\leqq i\leqq N}\alpha_i^2\gamma_\Omega(x_i)$$

で与えられる。ここで $G_\Omega(x,y)$ は、$-\Delta$ の Dirichlet 条件での Green 関数であり、$\gamma_\Omega(x) = h_\Omega(x,x)$、但し $h_\Omega(x,y) = G_\Omega(x,y) - \frac{1}{2\pi}\log|x-y|^{-1}$ である。

渦度 $\alpha(>0)$ の $N$ 個の渦点の正準集団の確率測度 $\mu^{\tilde\beta,N}$、分配関数 $Z_\beta(N)$ は、

$$\mu^{\tilde\beta,N} = \frac{1}{Z_\beta(N)}e^{-\tilde\beta H}dx_1\cdots dx_N, \quad Z_\beta(N) = \int_\Omega e^{-\tilde\beta H}dx_1\cdots dx_N$$

で与えられる。ここで、$\tilde\beta = \frac{1}{k_B T}$ であり、$k_B$ は Boltzmann 定数、$T$ は温度である。分配関数 $Z_\beta(N)$ は、$H$ の特異性に注意すると、$\tilde\beta \in (-\frac{8\pi}{\alpha^2 N}, \infty)$ の場合に定義できる。そこで、$\tilde\beta = \beta N$、$\alpha = \frac{1}{N}$ ( すなわち $\beta \in (-8\pi,\infty)$ ) として $N \longrightarrow \infty$ の極限 (平均場極限) を考えると、確率密度の空間上の測度 $\nu$ が存在し、$j$ 粒子分布関数の弱収束

$$\rho_j^N = \int dx_{j+1}dx_{j+2}\cdots dx_N\mu^{\beta N,N} \longrightarrow \int\nu(d\rho)\rho^{\otimes j}$$

が得られる。但し、$\nu$ は次の形の密度関数の上に台を持つ。

$$\rho(x) = \frac{1}{Z}e^{-\beta\int_\Omega G_\Omega(x,y)\rho(y)dy}, \quad Z = \int_\Omega e^{-\beta\int_\Omega G_\Omega(x,y)\rho(y)dy}dx,$$

すなわち、$u = -\beta\int_\Omega G_\Omega(x,y)\rho(y)dy$、$\lambda = -\beta$ とおくと、$u$ は、

$$-\Delta u = \lambda\frac{e^u}{\int_\Omega e^u dx} \quad \text{in } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{on } \partial\Omega$$

をみたす。

同様のことを、渦度 $\alpha(>0)$ の渦点が $n^+N$ 個、$-\alpha$ の渦点が $n^-N$ 個である場合 (但し、$0 \leqq n^+, n^- \leqq 1$、$n^+ + n^- = 1$ とする) を (境界が存在することを避けるため) 多様体上で考察すると、$\lambda_1 = -\beta n^+$、$\lambda_2 = -\beta n^-$ である場合として、(2) が得られる。

[2] この内容については、Y. B. Pointin and T. S. Lundgren, Phys. Fluids, 19 (1976) ; E. Caglioti, P. L. Lions, C. Marchioro, and M. Pulvirenti, Commun. Math. Phys., 143 (1992), 174 (1995) ; M. K. H. Kiessling, Commun. Pure Appl. Math., 46 (1993) ; C. Marchioro and M. Pulvirenti "Mathematical Theory of Incompressible Nonviscous Fluid" , Springer, 1994 ; Paul K. Newton "The N-Vortex Problem" , Springer, 2001 などを参。