

Gaussian estimates of order α and L^p -spectral independence of generators of C_0 -semigroups

進藤久和 (東京理科大学大学院理学研究科 博士課程)

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ は、開集合とする. 各 $p \in [1, \infty)$ に対し, $L^p(\Omega)$ 上の C_0 -半群 $T_p = (T_p(t))_{t \geq 0}$ が定まっているとする. ここで, 任意の $p, q \in [1, \infty)$ に対し, T_p, T_q は consistent, すなわち,

$$T_p(t)f = T_q(t)f \quad (t \geq 0, f \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega))$$

が成り立つと仮定する. この仮定の下, T_p の生成作用素 A_p に関し, スペクトルの不変性:

$$\sigma(A_p) = \sigma(A_2) \quad (p \in [1, \infty))$$

が成り立つと期待しても, 不自然ではない. しかし, W. Arendt によって, 一般には不変性の成り立たないことが示されている ([2, Section 3]). 従って, 不変性を導くためには, 何らかの条件を付け加える必要がある.

ここで, 関連する先行研究を見るのが適当である. R. Hempel と J. Voigt は, $L^p(\mathbb{R}^N)$ 内の Schrödinger 作用素 $H_{p,V} := -\frac{1}{2}\Delta + V$ より定まる $\mathcal{T}_p(t) := e^{-tH_{p,V}}$ を考察し, スペクトルの不変性が成り立つための十分条件を示した ([3, Theorem]). 今, この条件に加えて $V \geq 0$ が満たされている場合を考えると, $f \geq 0$ なる $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ に対し, $0 \leq \mathcal{T}_p(t)f \leq e^{\frac{t}{2}\Delta}f$ が成り立つ. このことから, heat semigroup $e^{t\Delta}$ によって評価される半群を研究対象とすることが考えられる. Arendt は, T_2 が upper Gaussian estimate を持つということを,

$$\exists M \geq 1 \exists \omega \in \mathbb{R} \exists b > 0 : |T_2(t)f| \leq Me^{\omega t} e^{bt\Delta} |f|$$

$(t \geq 0, f \in L^2(\Omega) \subset L^2(\mathbb{R}^N))$ が成り立つことと定義し, このような $T_2(t)$ ($t > 0$) が積分作用素であることを示した. また, その積分核を評価し, 次の結果を証明した: $\rho_\infty(A_p) = \rho_\infty(A_2)$ ($p \in [1, \infty)$) が成り立つ. 更に, A_2 が自己共役のとき, $\sigma(A_p) = \sigma(A_2)$ ($p \in [1, \infty)$) が成り立つ. 但し, $\rho_\infty(A_p)$ は, $\rho(A_p)$ の連結成分のうち, ある $w \in \mathbb{R}$ に対し, 右半平面 $\{\lambda \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} \lambda > w\}$ を含むものである ([2, Theorem 4.2, Corollary 4.3]). S. Miyajima と M. Ishikawa は, upper Gaussian estimate を一般化し, T_2 がある $\alpha \in (0, 1]$ に対し $(e^{-t(I-\Delta)^\alpha})_{t \geq 0}$ により essentially dominate されるということを,

$$\exists M \geq 1 \exists \omega \in \mathbb{R} \exists b > 0 : |T_2(t)f| \leq Me^{\omega t} e^{-bt(I-\Delta)^\alpha} |f|$$

$(t \geq 0, f \in L^2(\Omega) \subset L^2(\mathbb{R}^N))$ が成り立つことと定義した. $\alpha = 1$ の場合, この条件は upper Gaussian estimate と同値である. Miyajima と Ishikawa は, T_2 がある $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1]$ に対し $(e^{-t(I-\Delta)^\alpha})_{t \geq 0}$ により essentially dominate されていれば, 前述の Arendt の結果と同じ結論が成り立つことを示した ([5, Theorem 2.7, Corollary 2.8]). 一方, P.C. Kunstmann は, Arendt が [2] で用いた証明法を改良し, T_2 が upper Gaussian estimate より劣る評価しか持たない場合でも, スペクトルの不変性が成り立つことを証明した ([4, Theorem 1.2]).

以上の先行研究を受け, T_2 がある $\alpha \in (0, 1]$ に対し α 次の Gaussian estimate を持つということを,

$$\exists M \geq 1 \exists \omega \in \mathbb{R} \exists b > 0 : |T_2(t)f| \leq Me^{\omega t} e^{-bt(-\Delta)^\alpha} |f|$$

$(t \geq 0, f \in L^2(\Omega) \subset L^2(\mathbb{R}^N))$ が成り立つこととする. T_2 がある $\alpha \in (0, 1]$ に対し $(e^{-t(I-\Delta)^\alpha})_{t \geq 0}$ により essentially dominate されているとき, T_2 は α 次の Gaussian estimate を持つことが言える. 本

研究では、先ず、 $e^{-t(-\Delta)^\alpha}$ が積分作用素であることを示し、その積分核の漸近展開式を得た。より詳しくは、

$$K_\alpha(t, x) := \mathcal{F}^{-1} e^{-t|\cdot|^{2\alpha}} = \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{R}^N} e^{ix\xi} e^{-t|\xi|^{2\alpha}} d\xi \quad (t > 0, x \in \mathbb{R}^N)$$

とおくと、 $e^{-t(-\Delta)^\alpha}$ は、 $e^{-t(-\Delta)^\alpha} f = K_\alpha(t, \cdot) * f$ ($f \in L^2(\mathbb{R}^N)$) と表される積分作用素である。また、 $K_\alpha(t, x)$ の $|x| \rightarrow \infty$ のときの漸近展開式は、以下のようになる。

命題. $\alpha \in (0, 1]$ とすると、各 $t > 0$ に対し、 $|x| \rightarrow \infty$ のとき、漸近展開式

$$K_\alpha(t, x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \alpha t^{1+k}}{k!} \cdot \frac{2^{2\alpha+2\alpha k} \sin \pi \alpha (k+1) \Gamma(\alpha(k+1)) \Gamma(\frac{N+2\alpha+2\alpha k}{2})}{\pi^{\frac{N+2}{2}} |x|^{N+2\alpha+2\alpha k}}$$

が成り立つ。

この漸近展開式の証明は、 $N = 1$ の場合は、F. W. J. Olver [6, Theorem 2] の証明と同様にすればできる。 $N \geq 2$ の場合は、G.E. Andrews, R. Askey and R. Roy [1] の Corollary 9.10.4 の式を用いれば、 $N = 1$ の場合と並行して証明できる。

この結果をもとに、 α 次の Gaussian estimate を持つ C_0 -半群が積分作用素であることを示し、その積分核を評価した。これにより、Kunstmann の結果を用いて、[5, Theorem 2.7, Corollary 2.8] の拡張や、次の定理を得た。

定理. $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ は、有界開集合とする。 $L^2(\Omega)$ 上の C_0 -半群 $T = (T(t))_{t \geq 0}$ が、ある $\alpha \in (0, 1]$ に対し、 α 次の Gaussian estimate を持つと仮定する。このとき、各 $p \in [1, \infty)$ に対し、 T と consistent な $L^p(\Omega)$ 上の C_0 -半群 $T_p = (T_p(t))_{t \geq 0}$ が一意的に存在して、 T_p の生成作用素 A_p に関し、次が成り立つ：

$$\sigma(A_p) = \sigma(A_2) \quad (p \in [1, \infty)).$$

この他、 Ω や α に対する条件をある程度変えても、スペクトルの不変性は成り立つことが分かった。しかし、この定理の仮定において、 Ω を任意の開集合にすることはできていない。 Ω が有界という条件をはずすことが今後の課題である。

参考文献

- [1] G.E. Andrews, R. Askey and R. Roy, “Special functions,” Encyclopedia of Mathematics and its Applications (no. 71), Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
- [2] W. Arendt, *Gaussian estimates and interpolation of the spectrum in L^p* , Differential and Integral Equations **7**(no. 5)(1994), 1153-1168.
- [3] R. Hempel and J. Voigt, *The spectrum of a Schrödinger operator in $L^p(\mathbb{R}^N)$ is p -independent*, Communications in Mathematical Physics **104** (1986), 243-250.
- [4] P.C. Kunstmann, *Kernel estimates and L^p -spectral independence of differential and integral operators*, Operator theoretical methods (Timișoara, 1998), 197-211, The Theta Foundation, Bucharest, 2000.
- [5] S. Miyajima and M. Ishikawa, *Generalization of Gaussian estimates and interpolation of the spectrum in L^p* , SUT Journal of Mathematics **31**(no. 2)(1995), 161-176.
- [6] F.W.J. Olver, *Error bounds for stationary phase approximations*, SIAM Journal on Mathematical Analysis **5**(no. 1)(1974), 19-29.