剰余項のついた写像の等周不等式について

高橋 太 (Futoshi Takahashi)
東北大学理学部 COE フェロー
E-mail: tfutoshi@math.tohoku.ac.jp

東京理科大学神楽坂解析セミナー （2005 年 5 月 28 日）

この講演では、2 次元ユークリッド空間 $\mathbf{R^2}$ から $\mathbf{R^3}$ への写像に対する古典的な等周不等式の拡張を考察する。

まず次の関数空間を定義する。

$$\begin{aligned}\mathcal{W} &:= \left\{ u \in L^1_{loc}(\mathbf{R^2};\mathbf{R^3}) : \int_{\mathbf{R^2}} |\nabla u|^2 dx + \int_{\mathbf{R^2}} \frac{|u|^2}{(1+|x|^2)^2} dx < \infty \right\}, \\ \overline{\mathcal{W}} &:= \left\{ u \in \mathcal{W} : \int_{\mathbf{R^2}} \frac{u}{(1+|x|^2)^2} dx = 0 \right\}.\end{aligned}$$

$\Pi : \mathbf{S^2} \to \mathbf{R^2} \cup \{\infty\}$ を北極からの立体射影、Π^{-1} をその逆写像

$$\Pi^{-1}(x_1, x_2) = \frac{2}{1+|x|^2} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{S^2}$$

とおくと、関数空間 $\mathcal{W}$ は、

$$\mathcal{W} = \left\{ u \in L^1_{loc}(\mathbf{R^2};\mathbf{R^3}) : u \circ \Pi \in H^1(\mathbf{S^2};\mathbf{R^3}) \right\}$$

と表せることに注意する。ここで $H^1(\mathbf{S^2};\mathbf{R^3})$ は 2 次元球面 $\mathbf{S^2}$ 上の Sobolev 写像の空間である。Poincaré 不等式から $(u,v)_{\overline{\mathcal{W}}} := \int_{\mathbf{R^2}} \nabla u \cdot \nabla v dx$ は $\overline{\mathcal{W}}$ の上に内積を定義し、$||u||_{\overline{\mathcal{W}}} := (\int_{\mathbf{R^2}} |\nabla u|^2 dx)^{1/2}$ が $\overline{\mathcal{W}}$ のノルムを定めることにも注意する。以下、ベクトル値関数 $u \in \mathcal{W}$ に対して

$$\overline{u} := u - \frac{1}{\pi} \int_{\mathbf{R^2}} \frac{u}{(1+|x|^2)^2} dx \in \overline{\mathcal{W}}$$

という記号を用いる。

Q を（向きづけられた）体積汎関数

$$Q(u) := \int_{\mathbf{R^2}} u \cdot u_{x_1} \wedge u_{x_2} dx$$

とおく。ここに $u_{x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} u$ は偏導関数、また $\wedge$ は $\mathbf{R^3}$ の通常のベクトル積を表す。

次の不等式が古典的な「写像の等周不等式」と呼ばれるものである。

$$S|Q(u)|^{2/3} \le \int_{\mathbf{R^2}} |\nabla u|^2 dx \quad \text{for } \forall u \in \overline{\mathcal{W}}. \tag{1}$$

ここに

$$S=\inf_{u\in\overline{\mathcal{W}},Q(u)\neq 0}\frac{\int_{\mathbf{R^2}}|\nabla u|^2dx}{|Q(u)|^{2/3}}=(32\pi)^{1/3}$$

は写像の等周不等式 (1) の最良定数である。

任意の $\lambda>0$ と $a=(a_1,a_2)\in\mathbf{R^2}$ に対して、立体射影の逆写像の平行移動と相似拡大を表す関数を

$$U_{\lambda,a}(x)=\frac{2\lambda}{\lambda^2+|x-a|^2}\begin{pmatrix}x_1-a_1\\x_2-a_2\\-\lambda\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

とおくと、$\overline{U_{\lambda,a}}\in\overline{\mathcal{W}}$ は $S=\frac{\int_{\mathbf{R^2}}|\nabla\overline{U_{\lambda,a}}|^2dx}{|Q(\overline{U_{\lambda,a}})|^{2/3}}$ をみたすことが簡単な計算からわかる。

さて、次の 7 次元多様体

$$\mathcal{M}:=\left\{c\overline{RU_{\lambda,a}}:c\in\mathbf{R}\setminus\{0\},R\in SO(3),\lambda>0,a\in\mathbf{R^2}\right\}\subset\overline{\mathcal{W}}\setminus\{0\}$$

を考える。ここで $SO(3)=\{R:3\times 3\text{ 行列},\ R^t=R^{-1},\det(R)=1\}$. この多様体は、古典的な写像の等周不等式の最良定数 S を達成する写像の全体であることが Brezis-Coron の分類定理によりわかる。つまり

$$\mathcal{M}=\left\{u\in\overline{\mathcal{W}}\setminus\{0\}:\int_{\mathbf{R^2}}|\nabla u|^2dx=S|Q(u)|^{2/3}\right\}.$$

この講演の主定理は次である。これは古典的な写像の等周不等式 (1) の拡張に相当する。

Theorem. *There exists a positive constant* $C>0$ *such that*

$$\int_{\mathbf{R^2}}|\nabla u|^2dx-S|Q(u)|^{2/3}\geq Cd(u,\mathcal{M})^2$$

holds for any $u\in\overline{\mathcal{W}}$*. Here* $d(u,\mathcal{M})$ *denotes the distance of* u *from* $\mathcal{M}$ *in* $\overline{\mathcal{W}}$*;*

$$d(u,\mathcal{M})=\inf\{||u-v||_{\overline{\mathcal{W}}}:v\in\mathcal{M}\}.$$

証明の方針は、剰余項つきの Sobolev 不等式を取り扱った Bianchi-Egnell [2], Bartsch-Weth-Willem [1] の議論にならう。

証明の途中で、次の 2 点が key point になる。

(1) 非退化不等式

(2) S の最小化列の（平行移動・相似拡大を除いた）相対コンパクト性

さて、
$$\mathcal{Z} := \left\{ \pm\overline{RU_{\lambda,a}} : R \in SO(3), \lambda > 0, a \in \mathbf{R^2} \right\}$$
とおく。

(1) について、Isobe [3] による次の補題は、$\mathcal{Z}$ がエネルギー汎関数
$$E(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbf{R^2}} |\nabla u|^2 dx + \frac{2}{3}Q(u), \quad u \in \overline{\mathcal{W}},$$
の非退化臨界点からなる多様体（非退化臨界多様体）であること、つまり
$$T_{\overline{RU_{\lambda,a}}}\mathcal{Z} = \ker D^2 E(\overline{RU_{\lambda,a}})$$
であることを述べている。

Lemma 1. *There exists a constant* $C_1 > 0$ *such that*
$$\int_{\mathbf{R^2}} |\nabla \phi|^2 dx + 4\int_{\mathbf{R^2}} \overline{RU_{\lambda,a}} \cdot \phi_{x_1} \wedge \phi_{x_2} dx \geq C_1 \int_{\mathbf{R^2}} |\nabla \phi|^2 dx$$
holds for any $\overline{RU_{\lambda,a}} \in \overline{\mathcal{W}}$ *and any* $\phi \in \overline{\mathcal{W}}$ *with* $\phi \perp span\{\overline{RU_{\lambda,a}}\} \oplus T_{\overline{RU_{\lambda,a}}}\mathcal{Z}$.

(2) については、P.Lions の Concentration-Compactness argument を
$$I = \inf\{-|Q(v)| : v \in \overline{\mathcal{W}}, \int_{\mathbf{R^2}} |\nabla v|^2 dx = 1\} < 0,$$
に用いることで次の補題が成り立つ。

Lemma 2. *Let* $(u^n) \subset \overline{\mathcal{W}}$ *be any minimizing sequence for* I. *Then there exist* $a_n \in \mathbf{R^2}$ *and* $\lambda_n \in \mathbf{R}_+$ *such that the new minimizing sequence defined by*
$$\tilde{u}^n(\cdot) = \overline{u^n(\frac{\cdot - a_n}{\lambda_n})}$$
is relatively compact in $\overline{\mathcal{W}}$. *In particular, there exists a minimizer for* I *in* $\overline{\mathcal{W}}$.

$(-I) = (\frac{1}{S})^{2/3}$ であり、I-最小化列 (u_n) に対し $v_n = u_n/(|Q(u_n)|^{1/3})$ とおくと (v_n) は S-最小化列となるので、この補題から S の最小化列の（平行移動・相似拡大を除いた）相対コンパクト性が示せる。

References

[1] T. Bartsch, T. Weth, and M. Willem. *A Sobolev inequality with remainder term and critical equations on domains with topology for the polyharmonic operator,* Calc. Var. **18** (2003) 253-268.

[2] G. Bianchi, and H. Egnell. *A note on the Sobolev inequality,* J. Funct. Anal. **100** (1991) 18-24.

[3] T. Isobe. *On the asymptotic analysis of H-systems, I: asymptotic behavior of large solutions,* Adv. Diff. Eq. **6** (2001) 513-546.