

半空間上の熱対流方程式の局所可解性について

谷内 靖 (信州大学理学部)

$n(\geq 2)$ 次元半空間 $R_+^n = \{(\tilde{x}, x_n) \in R^n; \tilde{x} \in R^{n-1}, x_n > 0\}$ 上の非圧縮性粘性流体による熱対流を記述する次の Boussinesq 方程式を考える。本講演では遠方で減衰しない初期条件と境界条件に対する時間局所可解性について議論する。

$$(B) \begin{cases} \partial_t u - \Delta u + u \cdot \nabla u + \nabla p = g\theta, & t > 0, \quad x = (\tilde{x}, x_n) \in R_+^n, \\ \partial_t \theta - \Delta \theta + u \cdot \nabla \theta = 0, & t > 0, \quad x = (\tilde{x}, x_n) \in R_+^n, \\ \operatorname{div} u = 0, & t > 0, \quad x = (\tilde{x}, x_n) \in R_+^n, \\ u|_{\partial R_+^n} = 0, \quad \theta|_{\partial R_+^n} = S(\tilde{x}, t), \\ u|_{t=0} = u_0, \quad \theta|_{t=0} = \theta_0 \end{cases}$$

ここで、 $u = (u^1(x, t), u^2(x, t), \dots, u^n(x, t))$, $\theta = \theta(x, t)$, $p = p(x, t)$ はそれぞれ流体の未知速度場、未知温度分布、および圧力場を記述する。また、 $g = (g^1, g^2, \dots, g^n)$ は与えられた一様な重力加速度であり、 $S(\tilde{x}, t)$ は境界 ∂R_+^n 上で与えられている熱源の温度分布である。

これまで、多くの研究者により、様々な領域 Ω 上の熱対流が研究されてきた。(例えば、[1],[6]等を参照) しかし、それらの結果は初期条件 u_0, θ_0 に q -乗可積分性 ($q < \infty$) が課せられている。考える領域が全空間や半空間、外部領域などの非有界領域の場合、この仮定は、荒っぽく言うと、初期条件 $u_0(x), \theta_0(x)$ が空間遠方で減衰することを意味している。

一方、初期値に空間遠方で減衰を仮定しない場合の結果として、次のようなものが知られている。Cannone[3], Giga-Inui-Matsui[7] は、初期速度場 u_0 に遠方で減衰を仮定せずに、 $u_0 \in L^\infty(R^n)$ $\operatorname{div} u_0 = 0$ in $\mathcal{D}'$ に対して、全空間上の Navier-Stokes 方程式の時間局解を構成している。さらに、全空間上の Boussinesq 方程式に対しても類似の結果が成り立つことがわかっている。(Sawada との共同研究 [19]) 正確には、[19] において、 $\operatorname{div} u = 0$ in $\mathcal{D}'$ をみたす初期条件 $(u_0, \theta_0) \in (L^\infty(R^n) \times \dot{B}_{\infty,1}^0(R^n))$ に対して、

$$(0.1) \quad (u, \theta, \nabla p) \in C_w([0, T]; L^\infty(R^n)) \times C([0, T]; \dot{B}_{\infty,1}^0(R^n)) \times C((0, T); \dot{B}_{\infty,1}^0(R^n))$$

を満たす一意な局所解の存在を示した。ここで、 $\dot{B}_{\infty,1}^0$ は空間遠方で減衰しない関数を含んでいる。例えば、 $\sin x_n, \frac{1}{1+x_n^2}$ などが含まれる。これらの結果は全空間 R^n 上の初期値問題にたいする結果であるが、半空間上 R_+^n の問題に関しても、Inui-Matsui[10] は Navier-Stokes 方程式の局所可解性を初期条件 $u_0 \in L^\infty(R_+^n)$ に対し示している。(Shimizu[20] も類似の結果を示している。)

本講演では、負ベキの Besov 空間を利用し、空間遠方で減衰しないデータにたいする半空間上の Boussinesq 方程式の初期値境界値問題の局所可解性を議論する。

問題を扱いやすくするために、次のような変形を行う。関数 $h(x_n) = \begin{cases} 1 & (0 \leq x_n < 1) \\ 0 & (x_n > 2) \end{cases} \in C^\infty([0, \infty))$ を導入し、 $(\tilde{x}, t) \in \partial R_+^n \times [0, \infty)$ の関数 $S(\tilde{x}, t)$ を、次のように $(x, t) = (\tilde{x}, x_n, t) \in R_+^n \times [0, \infty)$ の関数 $\bar{S}(\tilde{x}, x_n, t)$ に拡張する。

$$\bar{S}(x, t) = S(\tilde{x}, t)h(x_n)$$

また、 $\bar{\theta} = \theta - \bar{S}$, $\bar{\theta}_0(x) = \theta_0(x) - \bar{S}(x, 0)$ とおくと、(B) は次のような方程式に変形される。

$$(B') \begin{cases} \partial_t u - \Delta u + u \cdot \nabla u + \nabla p = g(\bar{\theta} + \bar{S}), \\ \partial_t \bar{\theta} - \Delta \bar{\theta} + u \cdot \nabla \bar{\theta} = -\partial_t \bar{S} + \Delta \bar{S} - u \cdot \nabla \bar{S}, \\ \operatorname{div} u = 0, & t > 0, \quad x = (\tilde{x}, x_n) \in R_+^n, \\ u|_{\partial R_+^n} = 0, \quad \bar{\theta}|_{\partial R_+^n} = 0, \\ u|_{t=0} = u_0, \quad \bar{\theta}|_{t=0} = \bar{\theta}_0 \end{cases}$$

R_+^n 上で定義された関数 f の R^n への偶拡張、奇拡張、0 拡張をそれぞれ e^+f, e^-f, e^0f とおく。すなわち、 $e^\pm f(\tilde{x}, x_n) = \begin{cases} f(\tilde{x}, x_n) & (x_n \geq 0) \\ \pm f(\tilde{x}, -x_n) & (x_n < 0) \end{cases}$, $e^0f(\tilde{x}, x_n) = \begin{cases} f(\tilde{x}, x_n) & (x_n \geq 0) \\ 0 & (x_n < 0) \end{cases}$ 。さら

に、 R_+^n 上で定義された n 次元ベクトル値関数 $u(\tilde{x}, x_n) = (u^1(\tilde{x}, x_n), u^2(\tilde{x}, x_n), \dots, u^n(\tilde{x}, x_n))$ に対して R^n への鏡像を Eu とおく。すなわち、

$$Eu = (e^+ u^1, e^+ u^2, \dots, e^- u^n)$$

半空間上での Helmholtz 作用素は $P_+ = PE$ で与えられる。(Inui-Matsui[10] を参照) ここで、 P は行列作用素 $P = (P_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} = (\delta_{i,j} + R_i R_j)_{1 \leq i, j \leq n}$ で、 R_j は Riesz 変換 $R_j = \partial_j (-\Delta)^{-1/2}$ である。

形式的に P_+ を (B') の第一式に作用させると、

$$(AB) \begin{cases} \partial_t u + Au + P_+(u \cdot \nabla u) = P_+(g(\bar{\theta} + \bar{S})), \\ \partial_t \bar{\theta} - \Delta \bar{\theta} + u \cdot \nabla \bar{\theta} = -\partial_t \bar{S} + \Delta \bar{S} - u \cdot \nabla \bar{S}, \\ u|_{t=0} = u_0, \quad \bar{\theta}|_{t=0} = \bar{\theta}_0 \end{cases}$$

ここで、 $A = -P_+ \Delta$ であり、Stokes 作用素とよばれる。

本講演では、 $(-A)$ が適当な Besov 空間上で解析的半群を生成することを示すことにより、(AB) の解を構成する。

まず始めに、Besov 空間の定義を紹介する。

Littlewood-Paley 分解: $\varphi_j \in \mathcal{S}$ ($j = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$) $\hat{\varphi}_j(\xi) = \hat{\varphi}_0(2^{-j}\xi)$, $\text{supp } \hat{\varphi}_0 \subset \{1/2 < |\xi| < 2\}$, $1 = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}_j(\xi)$ ($\xi \neq 0$), $1 = \hat{\psi}(\xi) + \sum_{j=0}^{\infty} \hat{\varphi}_j(\xi)$ ($\xi \in R^n$) を用いて Besov space を定義する。

定義 (全空間上の Besov space)

$s \in R, 1 \leq p, q \leq \infty$ とする。

$$\begin{aligned} B_{p,q}^s &= B_{p,q}^s(R^n) \equiv \{f \in \mathcal{S}'; \|f\|_{\dot{B}_{p,q}^s} < \infty\} \\ \dot{B}_{p,q}^s &= \dot{B}_{p,q}^s(R^n) \equiv \{f \in \mathcal{S}'/\mathcal{P}; \|f\|_{\dot{B}_{p,q}^s} < \infty\} \quad (\mathcal{P} \text{ は多項式の全体}) \\ \|f\|_{B_{p,q}^s} &\equiv \|\psi * f\|_p + \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} (2^{js} \|\varphi_j * f\|_p)^q \right\}^{1/q}, \quad (q < \infty) \\ \|f\|_{\dot{B}_{p,\infty}^s} &\equiv \|\psi * f\|_p + \sup_{j=0,1,\dots} 2^{js} \|\varphi_j * f\|_p \\ \|f\|_{\dot{B}_{p,q}^s} &\equiv \left\{ \sum_{j=-\infty}^{\infty} (2^{js} \|\varphi_j * f\|_p)^q \right\}^{1/q}, \quad (q < \infty) \\ \|f\|_{\dot{B}_{p,\infty}^s} &\equiv \sup_{-\infty < j < \infty} 2^{js} \|\varphi_j * f\|_p. \end{aligned}$$

特に、 (s, p, q) が

$$(0.2) \quad s < n/p \quad \text{または、} \quad s = n/p, \quad q = 1$$

のとき、 $\dot{B}_{p,q}^s(R^n)$ は、次のように $\mathcal{S}'$ の部分空間と見なせる。すなわち、

$$(0.3) \quad \dot{B}_{p,q}^s(R^n) \cong \left\{ f \in \mathcal{S}' ; \|f\|_{\dot{B}_{p,q}^s} < \infty \text{ and } f = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \varphi_j * f \text{ in } \mathcal{S}' \right\}$$

が成り立つ。本講演では、 (s, p, q) が (0.2) をみたすとき、(0.3) の右辺を $\dot{B}_{p,q}^s(R^n)$ の定義とする。

定義 (半空間上の Besov space)

$$B_{p,q,+}^s = B_{p,q}^s(R_+^n) \equiv \{f; \exists g \in B_{p,q}^s(R^n) \text{ s.t. } f = g \text{ in } \mathcal{D}(R_+^n)\}, \quad \|f\|_{B_{p,q,+}^s} = \inf \|g\|_{B_{p,q}^s}$$

$\dot{B}_{p,q}^s(R_+^n)$ も同様に定義される。

定義 $B_{\infty,q,+, \sigma}^s : 0 < s < 1, 1 \leq q \leq \infty$ とおく。

$$B_{\infty,q,+, \sigma}^{-s} \equiv \{u \in (B_{\infty,q,+}^{-s})^n; \operatorname{div} Eu = 0 \text{ in } \mathcal{S}'\}$$

$u \in \dot{B}_{\infty,q,+, \sigma}^{-s}$ ($0 < s < 1 < q < \infty$) のとき、 $(Eu(x_n))^n \in C((-\infty, \infty); \dot{B}_{\infty,q}^{-s}(R^{n-1}))$ であり、従って、 $u^n|_{\partial R_+^n} = 0$ である。

Lemma 0.1 (a) $0 < s < 1, 1 \leq q \leq \infty, \chi(x_n) = 1_{(0,\infty)}(x_n)$ に対し、

$$\begin{aligned} f \in B_{p,q}^{-s} &\implies \chi \cdot f \in B_{\infty,q}^{-s}, \\ \|f\|_{B_{p,q,+, \sigma}^{-s}} &\cong \|e^0 f\|_{B_{p,q}^{-s}} \end{aligned}$$

(b) $\sup_{\tilde{x} \in R^{n-1}} |f(\tilde{x}, x_n)| \in L^p(0, \infty)$ ($1 \leq p \leq \infty$) のとき、
 $\implies e^\pm f, e^0 f \in \dot{B}_{\infty,\infty}^{-\frac{1}{p}}, \|e^\pm f\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^{-\frac{1}{p}}} \cong \|e^0 f\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^{-\frac{1}{p}}} \leq C \|f\|_{L^p(0,\infty; L^\infty(R_{\tilde{x}}^{n-1}))}$
 $\therefore 0 < s < 1, 1 \leq q \leq \infty$ のとき、

$$\|e^0 f\|_{\dot{B}_{\infty,q}^{-s}} \leq C \|f\|_{L_w^1(0,\infty; L^\infty) \cap L^\infty(R_+^n)}$$

Lemma 0.2 $0 < s < 1, 1 \leq q < \infty$ とする。

(1) $-A$ generates an analytic continuous semi-group $\{e^{-tA}\}_{t \geq 0}$ on $B_{p,q,+, \sigma}^{-s}$.

(2) $f \in B_{\infty,q,+, \sigma}^{-s}$ とする。

- (a) $\|e^{-tA} f\|_{B_{\infty,q,+, \sigma}^{-s}} \leq C(s) \|f\|_{B_{\infty,q,+, \sigma}^{-s}},$
- (b) $\|e^{-tA} f\|_{L^\infty} \leq C(s, \delta) (1 + \frac{1}{t})^{s/2+\delta} \|f\|_{B_{\infty,q,+, \sigma}^{-s}}, \quad (\delta > 0)$
- (c) $\|\nabla e^{-tA} f\|_{B_{\infty,q,+, \sigma}^{-s}} \leq C(s, \epsilon) (1 + \frac{1}{t})^{1/2+\epsilon} \|f\|_{B_{\infty,q,+, \sigma}^{-s}}, \quad (\epsilon > 0)$
- (d) $\|e^{-tA} f - e^{-\tau A} f\|_{B_{\infty,q,+, \sigma}^{-s}} \leq C(s) (t - \tau)^\alpha \tau^{-\alpha} \|f\|_{B_{\infty,q,+, \sigma}^{-s}} \quad (0 \leq \alpha \leq 1, 0 < \tau < t)$

この Lemma を利用すると次の定理が言える。

Theorem 1 Let $0 < s < 1, 1 \leq q < \infty, u_0 \in B_{\infty,q,+, \sigma}^{-s}, e^{-\bar{\theta}_0} \in \dot{B}_{\infty,1}^0(R^n)$, and $S, \partial_{\tilde{x}}^2 S, \partial_t S \in C^\alpha([0, \infty); L^\infty(R_{\tilde{x}}^{n-1}))$ for some $\alpha > 0$. Then there exist $T > 0$ and unique solution $(u, \bar{\theta})$ to (AB) on $[0, T)$ such that

$$\begin{aligned} u &\in C([0, T); B_{\infty,q,+, \sigma}^{-s}) \cap C^1((0, T); B_{\infty,q,+, \sigma}^{-s}) \cap C((0, T); D(A)) \\ e^{-\bar{\theta}} &\in C([0, T); \dot{B}_{\infty,1}^0) \cap C^1((0, T); \dot{B}_{\infty,1}^0) \cap C((0, T); \dot{B}_{\infty,1}^2). \end{aligned}$$

ここで、 $D(A)$ は $D(A) = (I + A)^{-1} B_{\infty,q,+, \sigma}^{-s}$ であり、 $D(A) \subset B_{\infty,q,+, \sigma}^{-s} \cap B_{\infty,q,+, \sigma}^{-s+2-\epsilon}$ for all $\epsilon > 0$ である。したがって、 $D(A) \subset W^{1,\infty}$ である。また、 $u \in D(A)$ のとき、 $u|_{\partial R_+^n} = 0$ がいえる。

Remark 上の定理で条件 $e^{-\bar{\theta}_0} \in \dot{B}_{\infty,1}^0(R^n)$ を $e^{-\bar{\theta}_0} \in \dot{B}_{\infty,\infty}^{-s}(R^n)$ ($0 < s < 1$) に換えても同様の局所可解性がいえる。

References

- [1] Cannon, J.R., DiBenedetto, E., *The initial value problem for Boussinesq equations with data in L^p* , Approximation Methods for Navier-Stokes problems, Edited by Rautmann, R., Lect. Notes in Math., **771** Springer-Verlag, Berlin (1980) 129-144.

- [2] Cannon, J.R., Knightly, G.H., *A note on the Cauchy problem for the Navier-Stokes equations*, SIAM J. Appl. Math., **18** (1970) 641-644.
- [3] Cannone, M., *Ondelettes, Praproducts et Navier-Stokes*, Diderot Editeur, Arts et Sciences Paris-New York-Amsterdam (1995).
- [4] Desch, W., Hieber, M., Prüss, J., *L^p -Theory of the Stokes equation in a half space*, J. evol. equ., **1** (2001) 115-142.
- [5] Hishida, T., *Existence and Regularizing properties of solutions for the nonstationary convection problem*, Funkcial. Ekvac., **34** (1991), 449-474.
- [6] Hishida, T., Yamada Y., *Global solutions for the heat convection equations in an exterior domain*, Tokyo J. Math., **15** (1992), 135-151.
- [7] Giga, Y., Inui, K., Matsui, S., *On the Cauchy problem for the Navier-Stokes equations with nondecaying initial data*, Quaderni di Matematica, **4** (1999), 28-68.
- [8] Giga, Y., Inui, K., Kato, J., Matsui, S., *Remarks on uniqueness of bounded solutions of the Navier-Stokes equations*, Nonlinear Analysis, **47** (2001), 4151-4156.
- [9] Giga, Y., Matsui, S., Sawada, O., *Global Existence of Two-Dimensional Navier-Stokes Flow with nondecaying initial velocity*, J. Math. fluid Mech., **3** (2001), 302-315.
- [10] Inui, K., Matsui, S., *An operatorial approach to the Navier-Stokes equations in a half space with non-decaying initial data*, Preprint
- [11] Kagei, Y., *On weak solutions of nonstationary Boussinesq equations*, Differential Integral Equations, **6** (1993), 587-611.
- [12] Kagei, Y., von Wahl, W., *The Eckhaus criterion for convection roll solutions of the Oberbeck-Boussinesq equations*, Int. J. Non-Linear Mechanics, **32** (1997), 563-620.
- [13] Kato, J., *On the uniqueness of nondecaying solutions of the Navier-Stokes equations*, Arch. Ration. Mech. Anal., **169** (2003), 159-175
- [14] Kobayashi, T., Muramatsu, T., *Abstract Besov space approach to the non-stationary Navier-Stokes equations*, Math. Mech. Appl. Sci. **15** (1992), 599-620.
- [15] Koch, H., Tataru, D., *Well-posedness for the Navier-Stokes equations*, Adv. Math., **157** (2001), 22-35.
- [16] Kozono, H., Yamazaki, M., *Semilinear heat equations and the Navier-Stokes equation with distributions in new function spaces as initial data*, Comm. P. D. E., **19** (1994), 191-200
- [17] Morimoto, H., *On the existence of weak solutions of equation of natural convection*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA, **36** (1989), 87-102.
- [18] Morimoto, H., *Non-stationary Boussinesq equations*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA, **39** (1992), 61-75.
- [19] Sawada, O., Taniuchi, Y. *On Boussinesq flow with nondecaying initial data*, Funkcial. Ekvac. **47** (2004), 225-250.
- [20] Shimizu, Y. *Existence of non-decaying Navier-Stokes flow in a Half space with a certain initial data*, preprint.
- [21] Taniuchi, Y., *Remarks on global solvability of 2-D Boussinesq equations with non-decaying initial data*, preprint