

非線形現象にみられる仮似変分不等式とその可解性について¹

阿曾 雅泰 (千葉県立柏高等学校)

Ω を $\mathbf{R}^3$ における滑らかな境界 Γ を持つ有界領域とし, T を任意の正の数とする. このとき, 次の θ と w に関する偏微分方程式系 $(P) := \{(1)-(4)\}$ を考える:

$$\theta_t + w_t - \Delta\theta = h(t, x) \quad \text{in } Q := (0, T) \times \Omega, \quad (1)$$

$$w_t + \alpha(w_t - p(\theta, w)) - \Delta w + \beta(w) \ni f(\theta, w) \quad \text{in } Q, \quad (2)$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial n} = \frac{\partial w}{\partial n} = 0 \quad \text{on } \Sigma := (0, T) \times \Gamma, \quad (3)$$

$$\theta(0, \cdot) = \theta_0, \quad w(0, \cdot) = w_0 \quad \text{in } \Omega. \quad (4)$$

ここで, α と β はそれぞれ区間 $[0, N]$ ($0 < N < +\infty$), $(-\infty, 1]$ の指示関数の劣微分を表す. したがって, α と β はそれぞれ以下で与えられる集合値関数となる:

$$\alpha(r) = \begin{cases} \emptyset & \text{if } r < 0 \text{ or } N < r, \\ (-\infty, 0] & \text{if } r = 0, \\ \{0\} & \text{if } 0 < r < N \\ [0, +\infty) & \text{if } r = N, \end{cases} \quad \beta(r) = \begin{cases} \emptyset & \text{if } r > 1, \\ \{0\} & \text{if } r < 1, \\ [0, +\infty) & \text{if } r = 1. \end{cases}$$

さらに, 方程式 (1) の右辺の h は Q において与えられた関数, 方程式 (2) における $p(\cdot, \cdot)$ と $f(\cdot, \cdot)$ は共に $\mathbf{R}^2$ から $\mathbf{R}$ への滑らかな Lipschitz 連続関数で, 特に p は非負値の関数と仮定する. (実は p の非負性が不可逆を表している) また, 等式 (4) における θ_0 と w_0 は与えられた初期値である. (P) により互いに相変化をする 2 つの状態 (例えば液体と固体) からなる物質の不可逆相転移現象を, 温度変化とそれに伴う状態の変化という視点から表現することができる. 実際, 物質の温度 θ と, その状態を表す関数 w の時空間的な変化を考え, 物質内の energy balance law と constitutive law により上の方程式系を得ることが出来る. (導出の詳細については書籍 [5] を参照) 不可逆相転移現象を記述する偏微分方程式系について, これまで多くの理論結果が得られているが, 今回取り扱う偏微分方程式系 (P) のように, (2) における極大単調作用素 α が, 2 つの未知関数 θ と w 依存して変化する場 合については, 未だ十分な理論結果が得られていない. また, α の原始関数である区間 $[0, N]$ の指示関数 (凸関数) が未知関数 θ, w に依存し変化するの で, (2) は特に, "仮似変分不等式" と呼ばれる. 方程式 (2) に着目すると, $\alpha(w_t - p(\theta, w))$ の項により, 常に $0 \leq p(\theta, w) \leq w_t$, つまり, 相変化パラメーター w の速度が常に 0 以上となることから, 連立系 (P) は不可逆の効果を含んでいることが分かる. 仮定とは逆に, p を非正値の関数で与えると, (P) は可逆相転移現象を表すこともできる. また, $\beta(w)$ の項により, w を 1 以下の値に制限することができる.

¹千葉大学教育学部の剣持信幸教授と LCPC の Michel Frémond 教授との共同研究

本講演では, (P) の特徴及び可解性を幾つかの段階に分けて説明する. まず, (P) の特徴のひとつである仮似変分不等式 (2) を単独で取り扱う. その本質を述べるために, (2) の拡散項 $-\Delta w$ を除いた以下の w についての常微分方程式の初期値問題 $(\tilde{P}) := \{(5), (6)\}$ を考えることにする:

$$w' + \alpha(w' - p(w)) + \beta(w) \ni f(w) \quad \text{in } (0, T), \quad (5)$$

$$w(0) = w_0 \in (-\infty, 1]. \quad (6)$$

非負値連続関数 p に対し,

$$p(w) = 0 \quad \text{if } w \geq 1 \quad (7)$$

を仮定すれば, $(\tilde{P})$ は一意大域解を持つことを説明する.

次に, (5) に拡散項 $-\Delta w$ をつけた偏微分方程式の初期値境界値問題 $(\tilde{P})_\Delta := \{(8), (9), (10)\}$ についての可解性を述べる:

$$w_t + \alpha(w_t - p(w)) - \Delta w + \beta(w) \ni f(w) \quad \text{in } Q, \quad (8)$$

$$\frac{\partial w}{\partial n} = 0 \quad \text{on } \Sigma, \quad (9)$$

$$w(\cdot, 0) = w_0 \quad \text{on } \Omega. \quad (10)$$

$(\tilde{P})_\Delta$ を考える際には非負値連続関数 p に対し,

- 偏導関数 $\partial^k p$ ($k = 1, 2$) は $\mathbf{R}$ において連続かつ有界
- $p(w) = 0, \quad \forall w \in \mathbf{R} \text{ with } w \geq 1$

を仮定しておく.

最後に, (P) の解の存在定理とその証明の概略について, さらには未解決問題について述べることにする.

参考文献

1. M. Aso, A nonlinear system for irreversible phase change with constraint, *Adv. Math. Sci. Appl.*, **15** (2005), 451–466.
2. M. Aso and N. Kenmochi, Quasi-variational evolution inequalities for a class of reaction-diffusion systems, *Nonlinear Analysis*, **63** (2005), e1207–e1217.
3. M. Aso and N. Kenmochi, A class of doubly nonlinear quasi-variational evolution problems, pp.17–41 in *Proceedings of The Third Polish-Japanese Days*, GAKUTO Intern. Ser. Math. Sci. Appl., **23**, Gakkotosho, Tokyo, 2005.

4. M. Aso, M. Frémond and N. Kenmochi, Parabolic systems with the unknown dependent constraints arising in phase transitions, to appear in Proceedings of International Conference on Free Boundary Problems 2005.
5. M. Frémond, *Non-smooth Thermomechanics*, Springer-Verlag, Berlin (2002).