$-\Delta u + F_u(x,u) = 0$ の heteroclinic な解の存在について

数学専攻　井出 浩明

(PDE) $-\Delta u + F_u(x,u) = 0$ の heteroclinic な解 v とは，Allen-Cahn type の場合，x が二次元で，$F(s,t,u) = a(s,t)u^2(u-1)^2$ の時，(PDE) の定数解 $u = 0,1$ に対して v が，$0 < v < 1$ を満たし，$v(s,t)$ は t 方向に周期 1 で，$v(s,t) \to 0$ $(s \to -\infty)$,$v(s,t) \to 1$ $(s \to \infty)$ となって，さらに (PDE) の解になっていることをいう．これを一般化して，x が次元 n のとき，F が x,u に対して周期 1 で C^2 級のときに，heteroclinic な解の存在を [2],[3] に基ずいて示した．すなわち，まず $W^{1,2}(\mathbb{T}^n)$ 上の汎関数 $\varphi(u) = \int_{\mathbb{T}^n}(\frac{1}{2}|\nabla u|^2 + F(x,u))dx$ の最小値 c_0 に対して，$\varphi^{-1}(c_0)$ が全順序空間となるので，$\varphi^{-1}(c_0)$ の中で隣接する v_0,w_0 を取る．このとき v_0,w_0 は (PDE) の周期解となるが，これに対して，次のような (PDE) の解 u の存在を示した:

$$\begin{cases} v_0 < u < w_0, \\ u = u(x_1, \ldots, x_n) \in W^{1,2}_{loc}(\mathbb{R} \times \mathbb{T}^{n-1}), \\ \displaystyle\int_{\mathbb{T}^{n-1}} \Big(\int_i^{i+1} |u - v_0|^2 dx_1 \Big) dx_2 \ldots dx_n \to 0 \qquad (i \to -\infty), \\ \displaystyle\int_{\mathbb{T}^{n-1}} \Big(\int_i^{i+1} |u - w_0|^2 dx_1 \Big) dx_2 \ldots dx_n \to 0 \qquad (i \to \infty). \end{cases}$$

このような条件を満たす関数 $u \in W^{1,2}_{loc}(\mathbb{R} \times \mathbb{T}^{n-1})$ 全体を Γ と置き，Γ 上の汎関数 I を次のように定める．

$$\begin{aligned} I(u) = & \liminf_{k \to -\infty} \sum_{i=k}^{i=0} \int_{\mathbb{T}^{n-1}} \Big(\int_i^{i+1} (\frac{1}{2}|\nabla u|^2 + F(x,u) - c_0) dx_1 \Big) dx_2 \ldots dx_n \\ & + \liminf_{k \to \infty} \sum_{i=1}^{i=k} \int_{\mathbb{T}^{n-1}} \Big(\int_i^{i+1} (\frac{1}{2}|\nabla u|^2 + F(x,u) - c_0) dx_1 \Big) dx_2 \ldots dx_n \end{aligned}$$

Γ はノルム空間でないことと，I が ∞ の値をとりうるということが，証明における難点であるが．I の最小値を与える関数が存在し，heteroclinic な解になっていることを示して，存在性が証明される．また，一次元のある簡単な場合に heteroclinic な解が具体的に求められた．

参考文献

[1]S.Bolotin and P.H. Rabinowitz, *Heteroclinic Solution of Mountain Pass Type*, Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications, vol. **66**, 105-114.

[2]Rabinowitz, P.H and Stredulinsky E., *On some result of Moser and of Bangert*, Analyse Nonlinéaire, **21**(2004), 678-688.

[3]Rabinowitz, P.H and Stredulinsky E., *On some result of Moser and of Bangert*, Calculus of Variations and PDE, **21**(2004), 157-207.

[4]Moser,J., *Minimal solution of variational problems on a torus*, Analyse Nonlinéaire, **3**(1986), 229-272.