

m 調和写像流の特異性とエネルギーの量子化について†

三沢 正史, 熊本大学大学院自然科学研究科, misawa@aster.sci.kumamoto-u.ac.jp

N を l 次元の滑らかなコンパクトリーマン多様体とし, $R^n (n > l)$ に等長的埋め込まれているとする. 時間空間領域 $R_\infty^m = (0, \infty) \times R^m$ ($m \geq 2$) 上で定義され, $N \subset R^n$ に値をもつ写像 $u(z) = (u^1(z), \dots, u^n(z))$, $z = (t, x) = (t, x_1, \dots, x_m) \in R_\infty^m$, に対して次の 2 階偏微分方程式系を考える

$$\partial_t u = \operatorname{div}(|Du|^{m-2} Du) + |Du|^{m-2} A(u)(Du, Du) \quad \text{in } R_\infty^m, \quad (1.1)$$

$$u = u_0 \quad \text{on } \{t = 0\} \times R^m. \quad (1.2)$$

ここで, $A(u)(Du, Du)$ は $N \subset R^n$ の第二基本量であり, $u \in N$ での N の接空間 $T_u(N) \subset R^n$ 上で定義された直交補空間 $(T_u(N))^\perp$ に値をとる写像である. 方程式 (1.1) は, m 調和作用素を主要部とする退化特異放物型方程式系であり, 次の変分問題に関連する時間発展方程式となっている. コンパクトリーマン多様体 $N \subset R^n$ に値をもつ R^m 上の Sobolev 空間 $W^{1,m}(R^m, R^n)$ に属する写像の集合

$$X = \{u \in W^{1,m}(R^m, R^n) : u \in N \text{ almost everywhere in } R^m\} \quad (1.3)$$

において m エネルギー $E(u) = \int_{R^m} \frac{1}{m} |Du|^m dx$ を最小化する変分問題の臨界関数, すなわち Euler-Lagrange の方程式

$$\operatorname{div}(|Du|^{m-2} Du) + |Du|^{m-2} A(u)(Du, Du) = 0 \quad \text{in } R^m, \quad (1.4)$$

の解を m 調和写像と呼ぶ. 方程式 (1.1) の解は, $u_0 \in X$ とする m エネルギーの負の向きの勾配流の解曲線 $u(t) \in X$, $t \geq 0$, であり, m 調和写像流と呼ばれる. $m = 2$ の場合, よく知られた調和写像の変分問題であり. (1.1) は調和写像流の方程式である.

m 調和写像流の存在とその正則性, 特異性を考察しよう. 一般に, 滑らかな初期値から出発しても解は時間大域的に滑らかになるとは限らないが, m 調和写像流の勾配流の性質から時間大域的な弱解を構成することが可能である. 実際, 初期値 $u_0 \in X$ に対して, m 調和写像流方程式 (1.1) の弱解が時間大域的に存在し, その弱解は, 空間一階導関数とともに高々”有限個の時間集合”を除いてヘルダー連続であることが証明されている (N. Hungerbühler の結果).

† 東京理科大学神楽坂セミナー (2007.1.27, 東京理科大学にて), 発表概要

本発表では, この m 調和写像流の弱解の特異性と定常解である m 調和写像の存在について次の結果を報告する.

定理 1 $(\omega, x_0) \in R_\infty^m$ を特異時間 ω での孤立特異点とする. このとき, 高々有限個の m 調和写像 $v_k \in C^{1,\alpha}(S^m, N)$, $k = 1, \dots, k_0$, が存在して等式

$$\lim_{t \rightarrow \omega} \int_B \frac{1}{m} |Du(t)|^m dx = \int_B \frac{1}{m} |Du(\omega)|^m dx + \sum_{k=1}^{k_0} \int_{S^m} \frac{1}{m} |Dv_k(x)|^m dx \quad (1.5)$$

がすべての球 $B = B_r(x_0) \subset R^m$, $r > 0$, に対して成り立つ. ここで, 球 B には (ω, x_0) 以外の特異点は含まれないものとする. また, $S^m \cong R^m$ は m 次元単位球面である.

参考文献

- [1] N. Hungerbühler, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. **24** (1997) 593-631.
- [2] F.-H. Lin, C. Y. Wang Calc. Var. & PDE **6** (1998) 369-380.
- [3] J. Qing, Comm. Anal. Geom. **3** (1995), no. 1-2, 297-315.
- [4] M. Struwe, Comm. Math. Helv. **60** (1985) 558-581.
- [5] M. Struwe, Acta Math. **160** (1988) 19-64.
- [6] C. Y. Wang, S. S. W. Wei, Diff. Int. Eq. **15**, no. 12, (2002) 1519-1532.