

中澤秀夫

千葉工業大学数学教室

1. 序～目的と動機

【目的】ランク 1 の摩擦項を伴う波動方程式の解が波動的な振る舞いをするもの（散乱状態になる解）と熱的な振る舞いをするもの（時間減衰する解）との重ね合わせで書ける事を示す。

【動機】一般には Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ に於ける Schrödinger 型の微分方程式の初期値問題をスペクトル解析の立場から考察したい；

$$(\star) \quad i \frac{d\varphi(t)}{dt} = H\varphi(t) \quad (t > 0), \quad \varphi(0) = \varphi_0 \in \mathcal{D}(H) \subset \mathcal{H},$$

ここに H は極大消散作用素であり、 $\mathcal{D}(H)$ は H の定義域を表す。解は縮小半群 $\{e^{-itH}\}_{t \geq 0}$ を用いて $\varphi(t) = e^{-itH}\varphi_0$ と表される。

[例 1: O.D.E.] $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t))$ であって、 H が $n \times n$ 定数行列で簡単のため n 個の相異なる固有値 λ_j ($j = 1, 2, \dots, n$) を持つとすると H はスペクトル分解 $H = \sum_{j=1}^n \lambda_j P_j$ され、従って解は $\varphi(t) = \sum_{j=1}^n e^{-i\lambda_j t} P_j \varphi_0$ と表される。但し以上において P_j は固有値 λ_j に属する固有空間への射影である。

この例から、作用素 H のスペクトルによって解が完全に決定されていることがわかる。

講演ではこの他に実及び複素ポテンシャルを伴う Schrödinger 方程式や摩擦項を伴う波動方程式に関する既存の結果に触れる。これらは解の挙動が 1 つのモード（波動的か熱的か）となるものである。摂動項に対する同じ条件下で 2 つのモードが混在する場合を取り扱い、解の特徴づけを目指した例として次がある：

[例 2；ランク 1 の消散型摂動項を伴う Schrödinger 方程式 ([1])]

$$\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}), \quad H_0 = -\frac{d^2}{dx^2}, \quad H = H_\alpha \equiv H_0 + \alpha(\cdot, \delta)\delta, \quad \alpha \in \mathbb{C}.$$

(H_α の定義域はやや複雑なので省略)

このときもし $\Re\alpha < 0, \Im\alpha \leq 0$ ならば

$$\sigma_c(H) = \sigma_c(H_0) = [0, \infty), \quad \sigma_p(H)(\text{固有値の集合}) = \{-\alpha^2/4\}$$

でこの固有値に属する固有空間への射影 P_α は

$$P_\alpha f(x) = -\alpha/2(f, e^{\bar{\alpha}|\cdot|/2})e^{\alpha|x|/2}$$

となる ($(\cdot, \cdot)$ は $\mathcal{H}$ における内積)。

以下、 $\Re\alpha \leq 0, \Im\alpha < 0$ の場合を考えると、波動作用素 $W(\alpha)$ は

$$W(\alpha) = s\text{-}\lim_{t \rightarrow \infty} e^{itH_0} e^{-itH_\alpha}$$

と定義される。これを用いて一般化された Fourier 変換 $\mathcal{F}_\alpha$ (この構成は H_α のスペクトル表現の構成に対応) を

$$\mathcal{F}_\alpha = \mathcal{F}_0 W(\alpha) \quad (\mathcal{F}_0: \text{通常の Fourier 変換})$$

と定めると一般化された Parseval の等式は

$$(f, g) = (\mathcal{F}_\alpha f, \mathcal{F}_\alpha g) + (P_\alpha f, g), \quad f, g \in \mathcal{H} \cap L^1(\mathbb{R}), \quad \Re\alpha < 0$$

となる。

* 愛媛大学工学部・門脇光輝氏、学習院大学理学部・渡辺一雄氏 との共同研究 ([2])。

命題. $\text{Ker}W(\alpha) = \mathcal{R}(P_\alpha)$, ここに左辺は波動作用素の *kernel*, 右辺は射影作用素の値域を表す。

これより解の挙動に関する次の主張を得る；

系. (1) $\varphi_0 \in \mathcal{R}(P_\alpha) \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|\varphi(t)\| = 0$. (2) $(I - P_\alpha)\varphi_0 \neq 0 \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|\varphi(t) - e^{-itH_0}W(\alpha)\varphi_0\| = 0$.

(ここに $\|\cdot\|$ は $\mathcal{H}$ におけるノルムを表す)

この波動版をもう少し一般的な状況下で考えたいということで今回の結果が得られた。

2. 結果

$$\mathcal{H} = \dot{H}^1(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R}), \quad H_0 = i \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{d^2}{dx^2} & 0 \end{pmatrix}, \quad H = H_0 + i \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -(\cdot, \psi)\psi \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{D}(H) = \{f = (f_1, f_2) \mid \partial_x^2 f_1 \in L^2(\mathbb{R}), f_2 \in L^2(\mathbb{R})\}$$

とする (このとき方程式 $(*)$ は $\varphi = (w, w_t)$ として $w_{tt} - w_{xx} + (\psi, w_t)\psi = 0$ となる)。但し $s > 1/2$ として

$$\psi \in L^{2,s}(\mathbb{R}) \equiv \{u(x) \mid \|u\|_s < \infty\}, \quad \|u\|_s^2 \equiv \int_{\mathbb{R}} (1 + |x|^2)^s |u(x)|^2 dx$$

を仮定する。このときまず次が判る：

定理 1. (1) $\sigma_p(H) \cap \mathbb{R} = \emptyset$. (2) 波動作用素 $W = s\text{-}\lim_{t \rightarrow \infty} e^{itH_0} e^{-itH}$ が存在する。

H のスペクトル構造をもう少し詳しく知りたいので ψ に対して更に次を仮定する：

【 ψ に対する仮定】(A1) $\psi \in L^{2,1+s}(\mathbb{R})$ ($s > 1/2$). (A2) $\Phi(\lambda) \equiv |\hat{\psi}(\lambda)|^2 + |\hat{\psi}(-\lambda)|^2$ に対して $\Phi(\lambda) \leq \Phi(\mu)$ (if $0 \leq \mu \leq \lambda$) (ここに $\hat{\cdot}$ は通常の Fourier 変換を表す)。

このとき H のリゾルベント $R(z) = (H - z)^{-1}$ は $R_0(z) = (H_0 - z)^{-1}$ として

$$\begin{cases} R(z) = R_0(z) + \frac{i(\cdot, \overline{v(z)})_{L^2}}{\Gamma(z)} v(z), \\ \text{但し } v(z) = \begin{pmatrix} i \\ z \end{pmatrix} r_0(z) \psi, \quad (r_0(z) = (-\Delta - z^2)^{-1}), \quad \Gamma(z) = 1 - iz(r_0(z)\psi, \psi)_{L^2} \end{cases}$$

と表される。

先の (A1), (A2) は $\Gamma(z)$ の零点 (即ちリゾルベントの特異点) が 1 位であることを保障する条件である。すると ψ が次の意味で小さい：

$$\left| \int \psi(x) dx \right| \leq \sqrt{2} \quad (\Leftrightarrow \Gamma(-i0) \geq 0)$$

ときには H は固有値を持たないが、 ψ が次の意味で大きい：

$$\left| \int \psi(x) dx \right| > \sqrt{2} \quad (\Leftrightarrow \Gamma(-i0) < 0)$$

ときには複素下半平面の虚軸上に固有値がただ一つだけ現れる； $\sigma_p(H) = \{i\kappa_0\}$ ($\kappa_0 < 0$) (なお $\sigma_c(H) = \mathbb{R}$ である)。この固有空間への射影を P とする。あとは [例 2] と同様に進む，即ち、 H_0 に対するスペクトル表現 $\mathcal{F}_0(\lambda)$ を用いて H 及び H^* に対するスペクトル表現 $\mathcal{F}(\lambda), \mathcal{G}(\lambda)$ を構成する。すると一般化された Parseval の等式が得られる：

定理 2.

$$(f, g) = \int_{\sigma_c(H)} (\mathcal{F}(\lambda)f, \mathcal{G}(\lambda)g)_{\mathbb{C}^2} d\lambda + (Pf, g) \quad (f, g \in \mathcal{H}).$$

(固有値が現れない場合には右边第 2 項は 0 として成立)

これより先の [例 2] と同様の主張 (命題・系) が得られる。

REFERENCES

1. M. Kadowaki, H. Nakazawa and K. Watanabe, *On the asymptotics of solutions for some Schrödinger equations with dissipative perturbations of rank one*, Hiroshima Math. J. **34** (2004), pp.345–369.
2. M. Kadowaki, H. Nakazawa and K. Watanabe, *Parseval formula for wave equations with dissipative term of rank one*, submitted (2006).