L^2-theory of second-order elliptic operators with singular first-order coefficients

数学専攻　野口　大介

係数関数が特異な１階微分の項をもつ２階楕円型作用素が m 増大になるための十分条件を与える．考察の対象となる作用素 $T: L^2(\mathbb{R}^N) \to L^2(\mathbb{R}^N)$ の形式的な定義は次の通りである:

$$
\begin{aligned}
(1) \qquad Tu :=& -\operatorname{div}(a(x)\nabla u) + b(x)\cdot\nabla u + q(x)\,u \\
=& -\sum_{j,k=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_k}\Big(a_{jk}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big) + \sum_{j=1}^{N} b_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j} + q(x)\,u.
\end{aligned}
$$

ここで，$a(x) = (a_{jk}(x))_{1\le j,k\le N}$, $b(x) = (b_j(x))_{1\le j\le N}$ の成分関数は実数値，q は複素数値関数で次の条件を満たすものとする:

$$
\begin{gathered}
a_{jk} = a_{kj} \in C_b^1(\mathbb{R}^N);\\
\exists\ \alpha > 0\,;\ \sum_{j,k=1}^{N} a_{jk}(x)\xi_j\xi_k \ge \alpha|\xi|^2 \quad \forall\,\xi,\, x \in \mathbb{R}^N;\\
(1+|x|)^{-1} b \in L^4 + L^\infty \subset L^4_{\mathrm{loc}}, \quad \operatorname{div} b \in L^\infty;\\
q \in L^2_{\mathrm{loc}}, \quad \mathrm{Re}\ q \ge 0.
\end{gathered}
$$

(1) の作用素 T で, その定義域を $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ に限定したものを $T_{\min}$ (minimal realization) で表すとき本研究において次の定理を得た.

定理 1. $T_{\min}$ は可閉で，その閉包 $\tilde{T}_{\min}$ は準 m 増大である．

証明の方針は, $a_{jk}(x) \equiv \delta_{jk}$ の場合が主題の文献 [**1**] に従った．鍵となるのは，intermediate realization T_{int} の導入にある．実際，$T_{\min}$ の値域条件につながる $C_0^\infty(\mathbb{R}^N) \subset R(\tilde{T}_{\min}+\lambda)$ を直接示すことは難しいが，T_{int} の利用でそれが次の二段階の議論に帰着される (準増大性については容易に確かめられる).
(I) $T_{\mathrm{int}} \subset \tilde{T}_{\min}$ を示す;
(II) 係数関数の特異性を扱うために適切な切断関数 (cut-off function) を選び, 正則化も利用して

$$C_0^\infty(\mathbb{R}^N) \subset R(T_{\mathrm{int}}+\lambda) \quad \forall\,\lambda > \lambda_0$$

を示す．ここで $\lambda_0 > 0$ である．

後半部分 (II) においては，$f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ を与えて近似方程式 $(T^n+\lambda)u^n = f$ を考えることになる．ここで T^n の係数 a^n, b^n, q^n は，それぞれ a, b, q を正則化 (b, q については切断も併用) したものである．近似解の収束にはコンパクト性を使う．今回考察したのは L^2 理論であるが，L^p 理論と共通する部分も多い．

参考文献

[1] T. Kato, Nonselfadjoint Schrödinger operators with singular first-order coefficients. Proc. Roy. Soc. Edinburgh, Sect. A **96** (1984), 323-329.