ある resonant な半線型楕円型方程式に対する Palais-Smale 列について

数学専攻　　荻原　洋介

非線型項が one-side bounded かつ resonant な半線型楕円型方程式の弱解，および古典解の存在性は，Kannan-Ortega[1] や Goncalves-Santos[2] によって，非線型項がある性質を満たす場合に示されている．しかし，[1] の証明は，L^p 理論や写像度を用いており，変分法的ではない．そこで，この種の問題を変分法的観点から研究した．考察対象の問題は次のものである．

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda_1 u = g(u) & \text{in } \Omega \\ \qquad\quad u = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \tag{1}$$

ここで，Ω は滑らかな境界をもつ $\mathbb{R}^n (n \geq 1)$ の有界領域，λ_1 は斉次 Dirichlet 境界条件のもとでの $-\Delta$ の第一固有値，g は $g_1(s) := \beta|s|^\sigma$（ただし，$\beta$ は正の数で，$n = 1, 2$ なら $1 < \sigma < \infty$, $n \geq 3$ なら $1 < \sigma < \dfrac{n+2}{n-2}$ とする）と定め，g_2 は supp g_2 が有界で，$g_2(0) = 0$，$g_2'(0) = 0$ な $\mathbb{R}$ での連続関数とするとき，

$$\begin{cases} g_1(s) := \beta|s|^\sigma = g(s_-) \\ g_2(s) := g(s_+) \end{cases}$$

とおき，

$$g(s) := g_1(s) + g_2(s)$$

としたものである．

方程式 (1) 式を変分法的に扱うということは，$G(s) := \displaystyle\int_0^s g(t)dt \quad (\forall s \in \mathbb{R})$ とし，$H_0^1(\Omega)$ 上の汎関数 $I(u) := \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \dfrac{\lambda_1}{2}\int_\Omega u^2 dx + \int_\Omega G(u)dx$ の臨界点を調べることである．この汎関数 I は Palais-Smale 条件を満たしていない．しかし，Palais-Smale 列を詳しく解析することにより，その挙動についていくつかの結果が得られた．得られた結果は以下のとおりである．

定理 1 汎関数 I に対する $\displaystyle\lim_{n\to\infty} ||u_n||_{H_0^1(\Omega)} = \infty$ な (PS) 列 $\{u_n\}_n$ は，正規化することにより λ_1 に対応する正の固有関数 φ_1 に $H_0^1(\Omega)$ で強収束する．

定理 2 空間次元が 1 のとき，$1 < \sigma < 5$，$c < \max G_2 \times |\Omega|$ とすれば，汎関数 I に対する $(\mathrm{PS})_c$ 列は $H_0^1(\Omega)$ で有界で，部分列をとることで方程式 (1) 式の弱解に弱収束する．
ここで，$G_2(s) := \displaystyle\int_0^s g_2(t)dt \quad (\forall s \in \mathbb{R})$ とする．

参考文献

[1] R. Kannan, R.Ortega, *Landesman-Lazer conditions for problems with "one-side unbounded" nonlinearities*, Nonlinear Anal.,**9**(1985), 1313-1317.

[2] J.V.Goncalves, C.A.Santos, *Some remarks on semilinear resonant elliptic problems*, Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications,vol. **66**(2005), 313-320.