空間無限遠で増大する初期値に対する NAVIER-STOKES 方程式の局所解について

澤田 由広 (早大理工、学振PD)

1. 導入

境界の無い領域での粘性非圧縮流体の運動を考える。全空間 $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) での Navier-Stokes 方程式の初期値問題として与えられる：

$$(1.1) \quad \begin{cases} U_t - \Delta U + (U, \nabla)U + \nabla P = F, & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, T), \\ \nabla \cdot U = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, T), \\ U|_{t=0} = U_0 & \text{in } \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

ここで $U = (U^1(x, t), \dots, U^n(x, t))$ と $P = P(x, t)$ はそれぞれ流速ベクトルと圧力を表す未知関数である。外力 $F := (F^1(x, t), \dots, F^n(x, t))$ と初期速度 $U_0 := (U_0^1(x), \dots, U_0^n(x))$ は予め与えられたベクトル値関数である。

ここでは (1.1) の滑らかな時間局所解の存在について議論していく。初期速度 U_0 が空間無限遠方で減衰している場合については、今までに数多くの研究結果がある；例えば [4, 9] などを参照せよ。また初期速度が空間無限遠で減衰しない場合についても、先行する結果がある；[3] 等で、 $U_0 \in L^\infty$ や BUC の時にも滑らかな時間局所解が構成されている。ベゾフ空間などを用いて、 L^∞ よりも広い関数空間に初期速度場が属する場合についても同様に調べられている；[13] を参照。

他方、速度場が増大する状況においては研究は少ない。一意性についての結果 [12] を見るのみである。そこで今回は

$$(1.2) \quad U_0(x) := -f(x) + u_0(x)$$

として与える。ここで f は globally Lipschitz 連続な関数で、 $u_0 \in L^p_\sigma(\mathbb{R}^n)$ とする。ただし $p \in [n, \infty)$ で、 f は次の2つの仮定を満たすとする：

$$(H1) \quad \nabla \cdot f = 0,$$

$$(H2) \quad \exists \Pi : \text{scalar function s.t. } \tilde{F} \in C(0, T; L^p_\sigma),$$

$$\text{where } \tilde{F} := F - \Delta f - (f, \nabla)f - \nabla \Pi.$$

仮定 (H2) は f および外力 F の条件である。外力 F が時間に依らない時、 $(U, P) := (-f, \Pi)$ が (1.1) の定常解ならば、 $\tilde{F} = 0$ となる。関数 f の例としては、 $f(x) = Mx + V$ 等が挙げられる。ただし $V \in \mathbb{R}^n$ は定数ベクトルで、 M は $n \times n$ 行列で次の2つを満たすとする：

$$\text{tr } M = 0 \quad \text{and} \quad M^2 \text{ is symmetric.}$$

この時に $\Pi := (\frac{1}{2}M^2x, x) + (V, M^T x)$ として与えられたならば、 $U = -f$ と $P = \Pi$ は (1.1) で $F = 0$ を満たす。

次に簡単な変換を導入する。(1.1) の解を (U, P) とし、それと $(-f, \Pi)$ との差を考える。すなわち

$$(1.3) \quad u := U + f, \quad \tilde{P} := P - \Pi$$

とした時、摂動 $(u, \tilde{P})$ は次の方程式を満たす：

$$(1.4) \quad \begin{cases} u_t - \Delta u - (f, \nabla)u + (u, \nabla)u - (u, \nabla)f + \nabla \tilde{P} = \tilde{F}, & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, T), \\ \nabla \cdot u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, T), \\ u|_{t=0} = u_0 & \text{in } \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

これから先は専ら (1.4) について議論する。

2. 主結果

ここにおいて、本報告集の主結果について言及する。まず、時間局所解 (mild solution) の存在定理を述べる。ここで mild solution とは、簡単に言うと (1.4) の積分方程式の解の事であるが、詳しい定義は次章で記述する。

定理 1. ([6]) $n \geq 2$, $p \in [n, \infty)$, $q \in [p, \infty]$, $u_0 \in L^p(\mathbb{R}^n)$, f および F は仮定 (H1) と (H2) を満たすとする。この時、ある正の時刻 T_0 と次のクラスに属する mild solution u が $(0, T_0)$ 上で一意に存在する：

$$\begin{aligned} [t \rightarrow t^{\frac{n}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}u(t)] &\in C([0, T_0]; L^q), \\ [t \rightarrow t^{\frac{n}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})+\frac{1}{2}}\nabla u(t)] &\in C([0, T_0]; L^q). \end{aligned}$$

定理 1 は逐次近似法 (即ち不動点定理) により証明される。その際に重要なのは半群の評価である。一意性は Gronwall の不等式から従う。

次に解の性質、特に正則性について調べた結果を述べる。定理 1 で得られた mild solution u は一般に滑らかであるのか分らない。だが $f(x) = Mx$ の場合は、 u が空間変数 x に対して C^∞ -級になる事が分る。解が C^∞ -級である事が分かれば、次に C^ω -級 (すなわち実解析的) であるのかを調べるのは自然な問題だと考えられる。実際、もし M が歪対称行列かつ外力 F は x について解析的ならば、 u は x について解析的である。これは次の評価から従う：

定理 2. ([7] を参照) $n \geq 2$, $p \in [n, \infty)$, $T \in (0, \infty)$, $u_0 \in L^p_\sigma(\mathbb{R}^n)$, M を歪対称行列とする。 $F = 0$ とする。 u を $(0, T)$ 上の mild solution とし、次のクラスに属するとする：ある正の定数 M_1, M_2 があって、

$$\sup_{0 < t < T} \|u(t)\|_n \leq M_1 \quad \text{and} \quad \sup_{0 < t < T} t^{\frac{n}{2}(\frac{1}{n}-\frac{1}{r})} \|u(t)\|_r \leq M_2.$$

この時、ある正の定数 K_1, K_2 があって、

$$(2.1) \quad \|\nabla^m u(t)\|_q \leq K_1 (K_2 m)^m t^{-\frac{m}{2} - \frac{n}{2}(\frac{1}{n}-\frac{1}{q})}$$

が任意の $q \in [n, \infty]$, $t \in (0, T)$ と $m \in \mathbb{N}_0$ で成り立つ。

評価 (2.1) があれば、テイラー展開の収束半径 (ρ と置く) を下から評価する事が出来る:

$$\rho(t) \geq \limsup_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{\|\partial_t^m u(t)\|_\infty}{m!} \right)^{-1/m} \geq C\sqrt{t} \quad \text{for } t \in (0, T), \quad \ell = 1, \dots, n.$$

これは Stirling の公式と Cauchy-Hadamard の公式より従う。

定理 2 の証明は、 $f = 0$ の時に証明を与えた [5] の手法を用いた。積分方程式の時間積分区間を 2 つに分けて評価する事が鍵となる。実際に高階微分を実行すると、特異性が大きくなる。そこで可積分性を稼ぐ為に、時間が 0 付近では半群に微分を押し付けて、一方時間が t 付近では u に微分を押し付けて評価する。最後には [2] で示された特別な Gronwall の不等式を用いて (2.1) を導き出す。

系. 空間変数についての解析性により (NS2) の解の伝播速度が無限大である事が直ちに従う。即ち、初期速度場の摂動 u_0 がコンパクト台を持っていても、解 $u(t)$ の台は任意の時刻 $t > 0$ で全空間に広がる。

3. 半群

定理を証明するに当って、半群の理論を整備しておく必要がある。作用素 A を $Au := -\Delta u - (f, \nabla)u + (u, \nabla)f$ 、 $D(A) := \{u \in W^{2,p} \cap L^p_\sigma; (f, \nabla)u \in L^p\}$ で定める。ここで f は $C^{1+\alpha}$ -級のベクトル値関数とする。この時、任意の $p \in (1, \infty)$ に対し $-A$ は $L^p_\sigma(\mathbb{R}^n)$ 上 (C_0) -半群 $\{e^{-tA}\}_{t \geq 0}$ を生成する事が知られている; [10, 11] を参照。また一般に、半群 $\{e^{-tA}\}_{t \geq 0}$ は非解析的である; [8] 等を参照。

一般に、半群は表示を持つとは限らない。しかし $f(x) = Mx$ の場合は、半群 $\{e^{-tA}\}_{t \geq 0}$ が次で表示されている:

$$(3.1) \quad e^{-tA}\varphi(x) = \frac{e^{-tM}}{(4\pi)^{n/2}(\det Q_t)^{1/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(e^{tM}x - y) e^{-\frac{(Q_t^{-1}y, y)}{4}} dy$$

ただし $Q_t := \int_0^t e^{sM} e^{sM^T} ds$ とする。勿論 $M = 0$ の場合、 e^{-tA} は熱半群と一致する。

Helmholtz 射影 $\mathbb{P} := (\delta_{ij} + R_i R_j)_{1 \leq i, j \leq n}$ を (1.4) の第 1 式に作用させ、Duhamel の原理から積分方程式

$$(INT) \quad u(t) = e^{-tA}u_0 + \int_0^t e^{-(t-s)A} \tilde{F}(s) ds \\ - \int_0^t e^{-(t-s)A} \mathbb{P}(u(s), \nabla)u(s) ds + 2 \int_0^t e^{-(t-s)A} \mathbb{P}(u(s), \nabla)f ds$$

を導く。ここでは (INT) の解 $u \in C([0, T]; L^p_\sigma(\mathbb{R}^n))$ を mild solution と呼ぶ事にする。形式的には、(INT) は (1.4) と等しい。

定理の証明するのに必要な評価を幾つか用意しておく:

補題 1. (i) ([1, 10]) 任意の $n \geq 2$ と globally Lipschitz 連続な関数 f に対し、定数 $C > 0$ と $\omega \in \mathbb{R}$ があって

$$(3.2) \quad \|\nabla^k e^{-tA}\varphi\|_q \leq C e^{\omega t} t^{-\frac{k}{2} - \frac{n}{2}(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})} \|\varphi\|_p$$

が任意の $1 \leq p \leq q \leq \infty$, $k = 0, 1, 2$, $t > 0$ と $\varphi \in L^p(\mathbb{R}^n)$ で成り立つ。さらに $p < q$ のとき、

$$(3.3) \quad t^{\frac{k}{2} + \frac{n}{2}(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})} \|\nabla^k e^{-tA} \varphi\|_q \rightarrow 0 \quad \text{as } t \rightarrow 0$$

も成り立つ。

(ii) ([7]) 更に $f(x) = Mx$ の場合、ある定数 $C_1, C_2, C_3 > 0$, $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4 \in \mathbb{R}$ が存在して、

$$(3.4) \quad \|\nabla^m e^{-tA} \varphi\|_q \leq C_1 e^{(\omega_1 + \omega_2 m)t} t^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})} \|\nabla^m \varphi\|_p$$

を任意の $t > 0$ と $m \in \mathbb{N}$ と $\varphi \in W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ でみたし、

$$(3.5) \quad \|\nabla^m e^{-tA} \varphi\|_q \leq C_2 (C_3 m)^{m/2} e^{(\omega_3 + \omega_4 m)t} t^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}) - \frac{m}{2}} \|\varphi\|_p$$

を任意の $t > 0$ と $m \in \mathbb{N}$ と $\varphi \in L^p(\mathbb{R}^n)$ でみたす。

(iii) $f(x) = Mx$ かつ M が歪対称行列の場合、(3.4) において $\omega_2 = 0$ と取れる。

REFERENCES

- [1] M. Bertoldi and L. Lorenzi, *Estimates of the derivatives for parabolic operators with unbounded coefficients*, Trans. Amer. Math. **357** (2005), 2627-2664.
- [2] M.-H. Giga and Y. Giga., *Nonlinear Partial Differential Equations*, Kyōritsu Shuppan, (1999) (in Japanese), English translation (2006).
- [3] Y. Giga, K. Inui and S. Matsui, *On the Cauchy problem for the Navier-Stokes equations with nondecaying initial data*, Quaderni di Matematica, **4** (1999), 28-68.
- [4] Y. Giga and T. Miyakawa, *Solutions in L^r of the Navier-Stokes initial value problem*, Arch. Ration. Mech. Anal., **89** (1985), 267-281.
- [5] Y. Giga and O. Sawada, *On regularizing-decay rate estimate for solutions to the Navier-Stokes initial value problem*, Nonlinear analysis and applications: to V. Lakshmikantham on his 80th birthday, **1** (2003), 549-562.
- [6] M. Hieber, A. Rhandi and O. Sawada, *On the Navier-Stokes flow with globally Lipschitz initial data*, (preprint).
- [7] M. Hieber and O. Sawada, *The Navier-Stokes equations in $\mathbb{R}^n$ with linearly growing initial data*, Arch. Ration. Mech. Anal., **175** (2005), 269-285.
- [8] T. Hishida, *An existence theorem for the Navier-Stokes flow in the exterior of a rotating obstacle*, Arch. Ration. Mech. Anal., **150** (1999), 307-348.
- [9] T. Kato, *Strong L^p -solutions of Navier-Stokes equations in $\mathbb{R}^n$ with applications to weak solutions*, Math. Z., **187** (1984), 471-480.
- [10] A. Lunardi and G. Metafune, *On the domains of elliptic operators in L^1* , Differential Integral Equations, **17** (2004), 73-97.
- [11] G. Metafune, J. Prüss, A. Rhandi and R. Schnaubelt, *The domain of the Ornstein-Uhlenbeck operator on an L^p -space with invariant measure*, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci., **1** (2002), 471-485.
- [12] H. Okamoto, *A uniqueness theorem for the unbounded classical solution of the nonstationary Navier-Stokes equations in $\mathbb{R}^3$* , J. Math. Anal. Appl., **181** (1994), 191-218.
- [13] O. Sawada, *On time-local solvability of the Navier-Stokes equations in Besov spaces*, Adv. Differential Equations, **8** (2003), 385-412.

〒 169-8555 新宿区大久保 3-4-1, 早稲田大学 理工学術院 数理科学
E-mail address: sawada@gm.math.waseda.ac.jp