

消散性非線型項を持つ Schrödinger 方程式 の解の長時間挙動について

下村 明洋 (学習院大学理学部)

本講演では, [1] に基づいて, 非線型 Schrödinger 方程式の初期値問題

$$i\partial_t u + \frac{1}{2}\Delta u = \lambda|u|^{2/n}u, \quad (t, x) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}^n, \quad (1)$$

$$u(0, x) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (2)$$

の解の長時間挙動を考える. ここで, n は空間次元で $n = 1, 2$ 又は 3 , $\partial_t = \partial/\partial t$, $\Delta = \sum_{j=1}^n \partial^2/\partial x_j^2$, λ は

$$\operatorname{Im} \lambda < 0 \quad (3)$$

を満たす複素定数, $u_0 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ は与えられた初期データ, $u : [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ は未知函数である.

方程式 (1) の非線型項 $\lambda|u|^{2/n}u$ は, $t \rightarrow \infty$ の時に非線型性の寄与が無視不可能となる (臨界の) 冪 “ $1 + 2/n$ ” である. (非線型項 $|u|^{p-1}u$ については, $p > 1 + 2/n$ ならば非線型項の影響は無視可能, $1 < p \leq 1 + 2/n$ ならばその寄与は無視不可能である事が知られている.) つまり, この非線型項は長距離型相互作用で, 方程式 (1) の解は $t \rightarrow \infty$ の時に自由 Schrödinger 方程式 (斉次線型 Schrödinger 方程式) の解の様に振舞う事は期待出来ない. 又, 複素係数 λ が条件 (3) を満たす時, 非線型項 $\lambda|u|^{2/n}u$ は消散性を持つ. 何故ならば, u を方程式 (1) の非自明な解とすると, 方程式 (1) と条件 (3) より,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|u(t)\|_{L_x^2}^2 &= 2 \operatorname{Re} \langle \partial_t u(t), u(t) \rangle \\ &= 2(\operatorname{Im} \lambda) \langle |u(t)|^{2/n} u(t), u(t) \rangle \\ &= 2(\operatorname{Im} \lambda) \|u(t)\|_{L_x^{2+2/n}}^{2+2/n} < 0 \end{aligned}$$

であり, $\|u(t)\|_{L_x^2}$ が減少するからである. (ここで, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は L^2 に於ける内積である.) 一方, λ が実数の時は, $\|u(t)\|_{L_x^2}$ は保存され減少しない. 従って, 条件 (3) が成り立つ時は (λ が実数の場合に比べて), 非線型項 $\lambda|u|^{2/n}u$ は (1) の解を減衰させる効果がある様に推測出来る. 以上より, 方程式 (1) は解を減衰させる効果のある非線型項を持ち, 時刻無限大での挙動にその寄与が現われると考えられる.

本講演の主目的は以下の通りである. 条件 (3) が成り立つ時, 小さい初期値に対して初期値問題 (1)–(2) の時間大域解の一意存在を示し, $t \rightarrow \infty$ の時のこの解の $L^2 \cap L^\infty$ に於ける漸近形を求める. 更に, この解の L^∞ ノルムの時間減衰評価を求める. もう少し詳しく言うと, この解の漸近形は自由解 (自由 Schrödinger 方程式の解) の相と振幅の両方を修正したもので, 漸近形と解の L^∞ ノルムは $(t \log t)^{-n/2}$ のオーダーで減衰する. (自由 Schrödinger 方程式の解は L_x^∞ で $t^{-n/2}$ 程度で減衰するので, 方程式 (1) の解は自由解より $(\log t)^{-n/2}$ だけ速く減衰する.)

参考文献

- [1] A. Shimomura, *Asymptotic behavior of solutions for Schrödinger equations with dissipative nonlinearities*, Comm. Partial Differential Equations **31** (2006), 1407–1423.