

振動定数をもつ 2 階非線形微分方程式について

山岡 直人 (上智大・理工)

2 階非線形微分方程式

$$y'' + a(t)g(y) = 0, \quad ' = \frac{d}{dt} \quad (1)$$

の振動問題を考える．ただし，関数 $a(t)$ は区間 $(0, \infty)$ で正値連続かつ局所有界変動であり，関数 $g(y)$ は $\mathbb{R}$ 上で実数値連続，初期値に関する解の一意性を保証できるくらい滑らかで， $yg(y) > 0$ ($y \neq 0$) を満たすものとする．このとき，方程式 (1) のすべての解は大域的に存在する ([2, Theorem A] 参照)．

本講演では，方程式 (1) の解の振動性を定性的に議論するため，解の振動について定義しておく．方程式 (1) の非自明解 $y(t)$ が振動するとは $+\infty$ の任意の近傍で零点をもつことをいい，逆に， $y(t)$ が振動しないとは $+\infty$ のある近傍で零点をもたないことをいう．

方程式 (1) は $a(t) = 1/t^2$, $g(y) = \lambda y$ のとき，Euler 型線形微分方程式

$$y'' + \frac{\lambda}{t^2}y = 0 \quad (E)$$

になる．方程式 (E) のすべての非自明解は $\lambda > 1/4$ ならば振動し， $0 < \lambda \leq 1/4$ ならば振動しないことがよく知られている．すなわち，定数 $1/4$ は方程式 (E) のすべての解が振動するためのパラメータ λ の下限である．そのような正の値は，一般に振動定数と呼ばれる．

方程式 (1) の特別な場合である方程式 (E) は振動定数 $1/4$ をもつが，『一般に，方程式 (1) は振動定数をもつのであろうか？』という疑問がここで生じる．そこで，正のパラメータ λ を含む Emden-Fowler 微分方程式

$$y'' + \lambda a(t)|y|^\gamma \operatorname{sgn} y = 0, \quad \gamma \neq 1 \quad (EF)_\lambda$$

を考える．このとき， $y(t)$ が方程式 $(EF)_\lambda$ の解ならば， $w(t) = (\lambda/\mu)^{1/(\gamma-1)}y(t)$ は方程式 $(EF)_\mu$ の解になる．ただし， λ と μ は共に正である．したがって，ある $\lambda_0 > 0$ に対して，方程式 $(EF)_{\lambda_0}$ のすべての解が振動するならば，任意の $\lambda > 0$ に対して $(EF)_\lambda$ のすべての解は振動する．ゆえに，方程式 (1) は常に振動定数をもつとは限らない．

注意 1. Emden-Fowler 方程式は，天体物理学や原子物理学でもしばしば現れる方程式で，定性的理論のみならず，応用面でも非常に重要である．なお，Emden-Fowler 方程式の振動問題に関する諸定理については [1] を参照せよ．

振動定数に着目して振動問題を研究するとき，強振動・強非振動・条件振動の3つに分類することがある（Swanson [3] 参照）．振動定数をもたない方程式の振動問題は強振動または強非振動のどちらかの分類に属し，振動定数をもつ方程式の振動問題は条件振動の分類に属す．本研究では，条件振動の観点から振動問題に取り組み，方程式 (1) のすべての解が振動するか否かを分ける臨界的な条件を与える．なお，その条件を記述するには，次の3つの関数列が必要となる：

$$\log_1 w = \log w \quad \text{and} \quad \log_{n+1} w = \log(\log_n w);$$

$$l_1(w) = 1 \quad \text{and} \quad l_{n+1}(w) = l_n(w) \log_n w;$$

$$S_0(w) = 0 \quad \text{and} \quad S_n(w) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\{l_i(w)\}^2}.$$

定理 1. 関数 $a(t)$ は十分大きな t に対して， $t^2 a(t) \geq 1$ を満たすとする．また，関数 $g(y)$ は $|y|$ が十分大きいとき

$$\frac{g(y)}{y} \geq \frac{1}{4} S_{n-1}(y^2) + \frac{\lambda}{\{l_n(y^2)\}^2}$$

を満たす定数 $\lambda > 1/4$ と $n \in \mathbb{N}$ が存在すると仮定する．このとき，方程式 (1) のすべての非自明解は振動する．

定理 2. 関数 $a(t)$ は十分大きな t に対して， $0 < t^2 a(t) \leq 1$ を満たすとする．また，関数 $g(y)$ は $y > 0$ または $y < 0$ で $|y|$ が十分大きいとき

$$\frac{g(y)}{y} \leq \frac{1}{4} S_n(y^2)$$

を満たす $n \in \mathbb{N}$ が存在すると仮定する．このとき，方程式 (1) のすべての非自明解は振動しない．

注意 2. Emden-Fowler 方程式の振動問題では，非線形項が比較的単純であるが，その代わりに係数項 $a(t)$ に重点を置くことが多い．一方，本研究における振動問題では，係数項を簡易化する代わりに，非線形項の条件に重点を置く．例えば，本研究では，関数 $g(y)$ の単調増加性を必要としない．

参考文献

- [1] M. Naito, Oscillatory theory for Emden-Fowler ordinary differential equations, *Sūgaku*, **37** (1985), 144–160.
- [2] J. Sugie, K. Kita and N. Yamaoka, Oscillation constant of second-order non-linear self-adjoint differential equations, *Ann. Mat. Pura Appl.* (4), **181** (2002), 309–337.
- [3] C.A. Swanson, Comparison and Oscillation Theory of Linear Differential Equations, Academic Press, New York-London, 1968.