L^p-spectral independence of fractional Laplacians perturbed by potentials

（ポテンシャルによって摂動された分数冪ラプラシアンのスペクトルの L^p-不変性）

進藤久和　（東京理科大学理学部）

Introduction.

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ は開集合とし，各 $p \in [1,\infty)$ に対し，$L^p(\Omega)$ 上の C_0-半群 $T_p = (T_p(t))_{t\geq 0}$ が与えられているとする．さらに，任意の $p,q \in [1,\infty)$ に対し，

$$T_p(t)f = T_q(t)f \quad (\forall t \geq 0, \forall f \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega))$$

が成り立つと仮定する．この等式が成り立つとき，T_p は T_q と consistent であるということにする．この仮定のもとで，T_p の生成作用素 A_p のスペクトルが $p \in [1,\infty)$ に依らないこと，すなわち，

$$\sigma(A_p) = \sigma(A_2) \quad (p \in [1,\infty))$$

が成り立つことを期待するのは不自然ではない．実は，このスペクトルの L^p-不変性は，一般には成り立たないことが，W. Arendt により示されている ([1, Section 3])．しかし，もちろん成り立つ重要な場合もある．以下では，L^p-不変性を示した先行研究の一部を紹介する．

先ず，B. Simon は，$L^p(\mathbb{R}^N)$ 内の Schrödinger 作用素 $-\Delta/2 + V$ のスペクトルが p に依存しないためのポテンシャル V に関する十分条件を提示した ([13, Theorem 5.1])．その後，R. Hempel と J. Voigt も同様の結果を示した ([5, Theorem])．但し，Simon は Kato class に含まれるクラスのポテンシャルを扱ったが，Hempel と Voigt は Kato class を含むクラスのポテンシャルを扱った．したがって，Hempel と Voigt の結果の方が Simon のものより一般的である．これらの結果を踏まえ，また，以前から分数冪ラプラシアンを考察の対象としていたこともあり，本研究では，Schrödinger 作用素の $-\Delta$ を $(-\Delta)^\alpha$ で置き換え，$(-\Delta)^\alpha + V$ のスペクトルの L^p-不変性を考察する．

1. 分数冪ラプラシアンのポテンシャルによる摂動

先ず，スペクトルの L^p-不変性を考察する前に，$(-\Delta)^\alpha + V$ を $L^p(\mathbb{R}^N)$ における作用素として定義しなければならない．$\alpha = 1$ の場合は，Voigt が [14] において考察しているので，それを参考にすることにする．Voigt は，同論文において，positive semigroup の perturbation theory を展開した．その上で，一般化した Kato class $\hat{K}_N$ を定義し，$\hat{K}_N$ によって規定されたポテンシャル V に対し，$\Delta/2 - V$ をその perturbation theory によって存在の保証される $L^p(\mathbb{R}^N)$ 上の C_0-半群の生成作用素として定義した．本研究では，$0 < \alpha < 1$ の場合に，Kato class を $(-\Delta)^\alpha$ に適するよう変更した：

定義. 各 $\alpha \in (0,1)$ に対し，以下の定義をする．

(i) 関数 $g_{N,\alpha} \colon \mathbb{R}^N \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ を，次のように定義する：

$$g_{N,\alpha}(x) := \begin{cases} |x| & (N/2 < \alpha,\ \text{i.e., } N = 1, 1/2 < \alpha < 1), \\ (\log|x|)/\pi & (N/2 = \alpha,\ \text{i.e., } N = 1, \alpha = 1/2), \\ \dfrac{1}{4^\alpha \pi^{N/2}} \cdot \dfrac{\Gamma(N/2 - \alpha)}{\Gamma(\alpha)} |x|^{-N+2\alpha} & (N/2 > \alpha). \end{cases}$$

(ii) 関数空間 $\hat{K}_{N,\alpha}$ を，次のように定義する：

$$\hat{K}_{N,\alpha} := \left\{ V \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N) \;\middle|\; \|V\|_{\hat{K}_{N,\alpha}} < \infty \right\},$$

$$\|V\|_{\hat{K}_{N,\alpha}} := \operatorname*{ess.sup}_{x \in \mathbb{R}^N} \int_{|x-y|<1} |g_{N,\alpha}(x-y)||V(y)|\, dy.$$

(iii) 任意の $V \in \hat{K}_{N,\alpha}$ に対し，$c_{N,\alpha}(V)$ という量を，次のように定義する：

$$c_{N,\alpha}(V) := \lim_{\rho\downarrow 0} \operatorname*{ess.sup}_{x\in\mathbb{R}^N} \int_{|x-y|<\rho} |g_{N,\alpha}(x-y)||V(y)|\,dy.$$

この定義のもとで，Voigt の perturbation theory を用いて，以下の結果を得た．

定理. $V\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ は可測関数とし，$V_+ := V \vee 0$, $V_- := (-V)\wedge 0$, $V^{(n)} := (\operatorname{sign} V)(|V| \wedge n)$ とする．このとき，もし

$$(*)\begin{cases} V_- \in \hat{K}_{N,\alpha},\ c_{N,\alpha}(V_-) < 1, \\ H^\alpha(\mathbb{R}^N) \cap Q(V_+) \text{ は}, L^2(\mathbb{R}^N) \text{ 内で稠密} \end{cases}$$

が成り立つならば，任意の $p \in [1,\infty)$, $t \geq 0$ に対し，

$$U_{\alpha,p,V}(t) = \text{s-}\lim_{n\to\infty} \exp\bigl(-t(H_{\alpha,p} + V^{(n)})\bigr)$$

が存在し，$U_{\alpha,p,V} := (U_{\alpha,p,V}(t))_{t\geq 0}$ は，$L^p(\mathbb{R}^N)$ 上の C_0-半群をなす．但し，$-H_{\alpha,p}$ は，$e^{-t(-\Delta)^\alpha}|_{L^2\cap L^p}$ の $\mathcal{L}(L^p)$ への一意拡張が定める C_0-半群の生成作用素である．

以下，$U_{\alpha,p,V}$ の生成作用素を $-H_{\alpha,p,V}$ で表す．

2. $U_{\alpha,2,V}$ に対する Feynman–Kac formula と L^p-L^q 評価

$U_{\alpha,2,V}$ に対し，Feynman–Kac formula を示すことができ，それから以下の L^p-L^q 評価が導かれる．

命題. もし前定理の仮定 $(*)$ が成り立つならば，任意の $1 \leq p \leq q \leq \infty$ に対し，ある定数 $M > 0, b > 0$ があって，

$$\bigl\|U_{\alpha,2,V}(t)\bigr\|_{p,q} \leq M t^{-\frac{N}{2\alpha}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} e^{tb}$$

が，任意の $t > 0$ に対して成り立つ．但し，$\|T\|_{p,q}$ は，以下で定義される:

$$\|T\|_{p,q} := \sup\left\{ \frac{\|Tu\|_q}{\|u\|_p} \;\middle|\; u \in \mathcal{S}, \|u\|_p \leq 1 \right\}$$

($\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ は Schwartz 空間).

3. スペクトルの L^p-不変性に関する結果

$U_{\alpha,2,V}$ の L^p-L^q 評価から，[5, Proposition 2.1] と同様にして，以下の定理を得た．

定理. もし前定理の仮定 $(*)$ が成り立つならば，任意の $1 \leq q \leq p \leq 2$ あるいは $2 \leq p \leq q \leq \infty$ に対し，

$$\sigma(H_{\alpha,p,V}) \subset \sigma(H_{\alpha,q,V})$$

が成り立つ．但し，$-H_{\alpha,p,V}$ は $U_{\alpha,p,V}$ の生成作用素であり，$H_{\alpha,\infty,V}$ は $H_{\alpha,1,V}$ の conjugate operator.

スペクトルの L^p-不変性に関しては，非常に強い仮定のもとでしか結果を得られなかった．

定理. $N = 1$, $1/2 < \alpha < 1$ とし，さらに以下を仮定する：

(i) $V_- \in \hat{K}_{N,\alpha}$ $(\Rightarrow c_{N,\alpha}(V) = 0)$,

(ii) $H^\alpha(\mathbb{R}) \cap Q(V_+)$ は，$L^2(\mathbb{R}^N)$ 内で稠密,

(iii) V は $(-\Delta)^\alpha$-有界であり，その相対限界は < 1.

このとき，$U_{\alpha,p,V}$ の生成作用素 $-H_{\alpha,p,V}$ のスペクトルは $p \in [1,\infty)$ に依らない．

参考文献

[1] Arendt, W., *Gaussian estimates and interpolation of the spectrum in L^p*, Diff. Int. Equations **7**(5) (1994), 1153–1168.

[2] Blumenthal, R.M. and Getoor, R.K., "Markov processes and potential theory", Academic Press, New York, 1968.

[3] Demuth, M. and van Casteren, J.A., "Stochastic spectral theory for selfadjoint Feller operators, A functional integration approach", Birkhäuser Verlag, Basel, 2000.

[4] Devinatz, A., *Schrödinger operators with singular potentials*, J. Operator Theory **4** (1980), 25–35.

[5] Hempel, R. and Voigt, J., *The spectrum of a Schrödinger operator in $L_p(\mathbb{R}^\nu)$ is p-independent*, Comm. Math. Phys. **104** (1986), 243–250.

[6] Jacob, N., "Pseudo-differential operators and Markov processes I, Fourier analysis and semigroups", Imperial College Press, 2001.

[7] Jacob, N., "Pseudo-differential operators and Markov processes III, Markov processes and applications", Imperial College Press, 2005.

[8] Kunstmann, P.C., *Heat kernel estimates and L^p spectral independence of elliptic operators*, Bull. London Math. Soc. **31** (1999), 345–353.

[9] Miyajima, S. and Shindoh, H., *Gaussian estimates of order α and L^p-spectral independence of generators of C_0-semigroups*, Positivity **11** (2007), no. 1, 15–39.

[10] Miyajima, S. and Shindoh, H., *Gaussian estimates of order α and L^p-spectral independence of generators of C_0-semigroups II*, SUT J. Math. **42** (2006), no. 2, 357–371.

[11] Reed, M. and Simon, B., "Methods of modern mathematical physics II, Fourier analysis, self-adjointness", Academic Press, 1975.

[12] Shindoh, H., *L^p-spectral independence of fractional Laplacians perturbed by potentials*, SUT J. Math. **42** (2006), no. 2, 225–294.

[13] Simon, B., *Brownian motion, L^p properties of Schrödinger operators and the localization of binding*, J. Funct. Anal. **35** (1980), 215–229.

[14] Voigt, J., *Absorption semigroups, their generators, and Schrödinger semigroups*, J. Funct. Anal. **67** (1986), 167–205.

[15] Voigt, J., *Absorption semigroups*, J. Operator Theory **20** (1988), 117–131.

[16] Yosida, K., "Functional analysis (sixth edition)", Springer-Verlag, Berlin, 1995.