Semigroups of locally Lipschitz operators associated with semilinear evolution equations of parabolic type [1]

田中　直樹（静岡大・理）

1. 序論（研究の背景と目的）

本講演の目的は，半線形発展方程式に関する適切性の問題を位相解析的な立場から考察することである．ここでいう適切性とは，解の存在と一意性，及び，解の初期値に関するリプシッツ連続的依存性を意味する．本研究の動機づけとなった研究を紹介しよう．

文献 [YO] では，$\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $2 \le q \le 2 + 4/N$ のとき，複素 Ginzburg-Landau 方程式の混合問題

$$\begin{cases} u_t - (\lambda + i\mu)\Delta u + (\kappa + i\nu)|u|^{q-2}u - \gamma u = 0, & (x,t) \in \Omega \times (0,\infty), \\ u = 0, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times (0,\infty), \end{cases}$$

但し，$\lambda > 0, \kappa > 0, \mu, \nu, \gamma \in \mathbb{R}$ とする，に関して，その解作用素 $S(t)$ が平滑性をもち，局所リプシッツ連続である，すなわち，各 $\tau > 0$ に対して，局所的に有界な関数 $L_\tau : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ が存在して

$$\|S(t)u_0 - S(t)v_0\|_{L^2} \le L_\tau(\|u_0\|_{L^2}, \|v_0\|_{L^2})\|u_0 - v_0\|_{L^2} \quad (t \in [0,\tau], u_0, v_0 \in L^2(\Omega)) \quad (1)$$

を満たすことが示された．ここでいう平滑性とは，任意の $L^2(\Omega)$ の元を初期値とする強解 u が

$$u(t) \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \qquad (\text{a.a. } t > 0)$$

を満たすことである．但し，q の仮定から $H^2(\Omega) \subset L^{2(q-1)}(\Omega)$ が成り立っている．

問題　任意の $L^2(\Omega)$ の元を初期値とするとき，C^1 級の解，すなわち，

$$u \in C([0,\infty); L^2(\Omega)) \cap C^1((0,\infty); L^2(\Omega)) \cap C((0,\infty); H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))$$

をみたす解を見つけることが可能か．

微分方程式系に対する適切性の問題を考察するための位相解析的手法として，与えられた微分方程式系を，バナッハ空間 X における作用素 A に対する抽象的コーシー問題

$$u'(t) = Au(t) \quad (t \ge 0), \qquad u(0) = x \in D\ (\subset X) \qquad (\text{ACP}; A, x)$$

に書き直して調べる方法がある．その方法を振り返ろう．このコーシー問題が，上述の意味で適切である，すなわち，各 $x \in D$ に対して，ある意味の解 $u(t;x)$ が時間大域的に存在し一意であり，その解が初期値に局所リプシッツ連続的に依存するとすれば，

$$S(t)x = u(t;x) \quad (t \ge 0, x \in D)$$

により定まる，D からそれ自身への作用素族 $\{S(t); t \ge 0\}$ は次の性質を持つ．

[1] 本研究は，松本敏隆氏（広島大・理）との共同研究である．

(S1) $S(0)x = x \quad (x \in D)$, $S(t+s)x = S(t)S(s)x \quad (s, t \geq 0,\ x \in D)$.

(S2) 各 $x \in D$ に対して，$S(\cdot)x : [0, \infty) \to X$ は連続である．

(S3) 各 $\tau \geq 0$, $r \in \mathbb{R}_+^d$ に対し，$L_{\tau,r} > 0$ が存在して

$$\|S(t)x - S(t)y\| \leq L_{\tau,r}\|x - y\| \quad (x, y \in D_r,\ t \in [0, \tau]).$$

但し，各 $r \in \mathbb{R}_+^d$ に対して，$D_r = \{x \in D;\ \varphi(x) \leq r\}$ は X の閉集合であり，$\varphi = (\varphi_i)_{i=1}^d$ は各成分 $\varphi_i : X \to [0, \infty]$ が適正な汎関数であるベクトル値汎関数であり，D はすべての φ_i の有効域の部分集合とする．また，$r = (r_i)_{i=1}^d \leq R = (R_i)_{i=1}^d \Leftrightarrow r_i \leq R_i\ (1 \leq i \leq d)$ と定める．

ここで簡単に φ の役割を説明しよう．文献 [YO] の中で得られた解作用素の連続性 (1) は，$D = L^2(\Omega)$, $\varphi(u) = \|u\|_{L^2}^2$ $(u \in X = L^2(\Omega))$ を用いることで，条件 (S3) の形に述べることができる．つまり，φ の役割は，一般的には，条件 (S1), (S2) から導出できない解作用素自身の連続性を局所的に定式化するためのものである．

条件 (S1), (S2), (S3) を満たす D からそれ自身への作用素族 $\{S(t); t \geq 0\}$ を φ **に関する D 上の局所リプシッツ作用素半群**といい，つぎで定義される作用素 A_0 を $\{S(t); t \geq 0\}$ の**無限小生成作用素**という．

$$\begin{cases} A_0 x = \lim_{h \downarrow 0}(S(h)x - x)/h \quad (x \in D(A_0)), \\ D(A_0) = \{x \in D;\ \lim_{h \downarrow 0}(S(h)x - x)/h \text{ が存在する }\}. \end{cases}$$

もし，局所リプシッツ作用素半群 $\{S(t); t \geq 0\}$ が，$x \in D$ に対して $S(\cdot)x \in C^1([0, \infty); X)$ を満たすならば，$(d/dt)S(t)x = A_0 S(t)x \ \ (t \geq 0)$ である，すなわち，$u(t) = S(t)x$ は (ACP;A_0, x) の解である．いま述べたことは特殊な場合ではあるが，このことから，与えられた作用素 A に対する抽象的コーシー問題 (ACP) が本講演の意味で適切であるかどうかを考察するためには，作用素 A が局所リプシッツ作用素半群の無限小生成作用素であるかどうかを考察すればよい．このように，微分方程式系に対する適切性の問題は，抽象的コーシー問題 (ACP) の適切性の問題へ，さらに,『局所リプシッツ作用素半群の無限小生成作用素の特徴づけ』の問題に翻訳される．

2. 局所リプシッツ作用素半群の諸性質

X をバナッハ空間とし，D を X の部分集合とする．$\varphi = (\varphi_i)_{i=1}^d$ は次の条件を満たすとする:

(φ1) 各成分 $\varphi_i : X \to [0, \infty]$ は適正な汎関数である．

(φ2) 各 $1 \leq i \leq d$ に対して $D(\varphi_i) := \{x \in X;\ \varphi_i(x) < \infty\} \supset D$ である．

(φ3) 各 $r \in \mathbb{R}_+^d$ に対して，$D_r := \{x \in D;\ \varphi(x) \leq r\}$ は X の閉集合である．

$\{S(t); t \geq 0\}$ を φ に関する D 上の局所リプシッツ作用素半群とする．時間大域的な解を見つけることを目的としているため，$\{S(t); t \geq 0\}$ に関するつぎの増大条件を導入する:

(S4) $\varphi(S(t)x) \leq m(t; \varphi(x)) \quad (t \geq 0, x \in D)$.

但し，各 $r \in \mathbb{R}_+^d$ に対して，$m(t;r)$ は，初期値問題

$$p'(t) = g(p(t)) \quad (t \geq 0), \qquad p(0) = r \tag{2}$$

の最大解を表し，$g \in C(\mathbb{R}_+^d; \mathbb{R}^d)$ は次の条件を満たす関数とする．以下, **比較関数**と呼ぶ.
(g1) 各 $i = 1, 2, \ldots, d$ に対して，$g_i(0) \geq 0$ である．
(g2) 各 $i = 1, 2, \ldots, d$ に対して，$r \leq \hat{r}$, $r_i = \hat{r}_i$ ならば $g_i(r) \leq g_i(\hat{r})$ である．
(g3) 各 $r \in \mathbb{R}_+^d$ に対して，初期値問題 (2) は時間大域的な最大解をもつ．

条件 (S4) は，微分方程式系の混合問題などの解のエネルギー評価，ア・プリオリ評価，減衰評価などを抽象化したものである．

つぎの命題は，(C_0) 半群に対する Feller の定理の非線形版と考えられる．

命題 1．$\{S(t); t \geq 0\}$ を条件 (S4) をみたす φ に関する D 上の局所リプシッツ作用素半群とする．このとき，つぎの (i), (ii) が成り立つ:

(i) $\tau > 0$ と $[0,\tau] \times X \times X$ 上の非負値汎関数族 $\{V_r(\cdot,\cdot,\cdot); r \in \mathbb{R}_+^d\}$ が存在して，つぎの (V1), (V2), (V3) をみたす.

(V1) 各 $r \in \mathbb{R}_+^d$, x, $y \in D_r$ に対して，$V_r(\cdot, x, y) : [0,\tau] \to \mathbb{R}_+$ は連続である．

(V2) 各 $r \in \mathbb{R}_+^d$ に対して，$L(r) \geq 0$ が存在して，

$$|V_r(t,x,y) - V_r(t,\hat{x},\hat{y})| \leq L(r)(\|x - \hat{x}\| + \|y - \hat{y}\|)$$

$((t,x,y), (t,\hat{x},\hat{y}) \in [0,\tau] \times X \times X)$.

(V3) 各 $r \in \mathbb{R}_+^d$ に対して，$M(r) \geq m(r) > 0$ が存在して，

$$m(r)\|x - y\| \leq V_r(t,x,y) \leq M(r)\|x - y\|$$

$((t,x,y) \in [0,\tau] \times D_r \times D_r)$.

(ii) 各 $r \in \mathbb{R}_+^d$ に対して，$R \geq r$ をみたす $R \in \mathbb{R}_+^d$ と $\omega \geq 0$ が存在して，

$$\liminf_{h \downarrow 0} (V_R(t+h, S(h)x, S(h)y) - V_R(t,x,y))/h \leq \omega V_R(t,x,y)$$

$((t,x,y) \in [0,\tau) \times D_r \times D_r)$.

この命題から，理論的には，解が初期値にリプシッツ連続的に依存する微分方程式系の解作用素は，適当な非負な汎関数族に関して縮小的になる．逆に，このような性質を持つ非負な汎関数族を構成できれば，解が初期値にリプシッツ連続的に依存することを示すことができる．それでは，実用上，このような性質を持つ非負な汎関数族をどのように構成すればよいのだろうか．複素 Ginzburg-Landau 方程式の混合問題を例にとり，その解作用素が局所リプシッツ連続であることをどのように導出するかを, 岡沢・横田のアイデアをもとに, 考えてみよう．

解の初期値に関する連続依存性の導出

複素 Ginzburg-Landau 方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} - (\lambda + i\mu)\Delta u + (\kappa + i\nu)|u|^{q-2}u - \gamma u = 0 \tag{3}$$

について，変分をとることができるかなどの微妙な問題点は無視し，形式的な計算をもとに変分をとると，

$$\frac{\partial \dot{u}}{\partial t} - (\lambda + i\mu)\Delta \dot{u} + (\kappa + i\nu)\{(q-2)|u|^{q-4}\mathrm{Re}(u,\dot{u})u + |u|^{q-2}\dot{u}\} - \gamma \dot{u} = 0 \tag{4}$$

が成り立つ．$2\mathrm{Re}\langle(4), \dot{u}\rangle$ とすると，

$$\begin{aligned}&(d/dt)\|\dot{u}\|_{L^2}^2 + 2\lambda\|\nabla\dot{u}\|_{L^2}^2 \\ &\quad + 2\mathrm{Re}(\kappa + i\nu)\int_\Omega (q-2)|u|^{q-4}\mathrm{Re}(u,\dot{u})(u,\dot{u}) + |u|^{q-2}|\dot{u}|^2\,dx - 2\gamma\|\dot{u}\|_{L^2}^2 = 0\end{aligned} \tag{5}$$

である．これより，

$$(d/dt)\|\dot{u}\|_{L^2}^2 + 2\lambda\|\nabla\dot{u}\|_{L^2}^2 \le 2(\kappa^2+\nu^2)^{1/2}(q-1)\int_\Omega |u|^{q-2}|\dot{u}|^2\,dx + 2\gamma\|\dot{u}\|_{L^2}^2.$$

Hölder の不等式と Gagliardo-Nirenberg の不等式を用いると，

$$\begin{aligned}\int_\Omega |u|^{q-2}|\dot{u}|^2\,dx &\le \|u\|_{L^q}^{q-2}\|\dot{u}\|_{L^q}^2 \le c_1\|u\|_{L^q}^{q-2}\|\dot{u}\|_{L^2}^{2(1-\sigma)}\|\dot{u}\|_{H^1}^{2\sigma} \\ &\le c_2\|u\|_{L^q}^{q-2}\|\dot{u}\|_{L^2}^{2(1-\sigma)}(\|\dot{u}\|_{L^2}^{2\sigma} + \|\nabla\dot{u}\|_{L^2}^{2\sigma}),\end{aligned}$$

但し，$\sigma = N(1/2 - 1/q)$ である．Young の不等式を用いて，

$$(d/dt)\|\dot{u}\|_{L^2}^2 + 2\lambda\|\nabla\dot{u}\|_{L^2}^2 \le c_3\|u\|_{L^q}^{(q-2)/(1-\sigma)}\|\dot{u}\|_{L^2}^2 + 2\lambda\|\nabla\dot{u}\|_{L^2}^2 + c_4\|\dot{u}\|_{L^2}^2.$$

そこで，もし

$$(q-2)/(1-\sigma) \le q, \quad \text{すなわち} \quad 2 \le q \le 2 + 4/N$$

ならば，$(d/dt)\|\dot{u}\|_{L^2}^2 \le 2(a + b\|u\|_{L^q}^q)\|\dot{u}\|_{L^2}^2$ であるから，

$$(d/dt)\|\dot{u}\|_{L^2} \le (a + b\|u\|_{L^q}^q)\|\dot{u}\|_{L^2}. \tag{6}$$

つぎに，$2\mathrm{Re}\langle(3), u\rangle$ とすると

$$(d/dt)\|u\|_{L^2}^2 + 2\lambda\|\nabla u\|_{L^2}^2 + 2\kappa\|u\|_{L^q}^q - 2\gamma\|u\|_{L^2}^2 = 0. \tag{7}$$

(6)+$(b/2\kappa)\|\dot{u}\|_{L^2}^2\times$ (7) とすると，

$$\begin{aligned}&(d/dt)\exp((b/2\kappa)\|u\|_{L^2}^2)\|\dot{u}\|_{L^2} \\ &\quad = \exp((b/2\kappa)\|u\|_{L^2}^2)((d/dt)\|\dot{u}\|_{L^2} + (b/2\kappa)((d/dt)\|u\|_{L^2}^2)\|\dot{u}\|_{L^2}) \\ &\quad \le \exp((b/2\kappa)\|u\|_{L^2}^2)(a\|\dot{u}\|_{L^2} + (b/\kappa)\gamma\|u\|_{L^2}^2\|\dot{u}\|_{L^2}) \\ &\quad = \exp((b/2\kappa)\|u\|_{L^2}^2)\|\dot{u}\|_{L^2}(a + (b/\kappa)\gamma\|u\|_{L^2}^2).\end{aligned} \tag{8}$$

各 $r>0$ に対して，d_r を次で定義される Riemann metric とする:

$$d_r(f,g)=\inf\left\{\int_0^1 \exp((b/2\kappa)\|u(\theta)\|_{L^2}^2)\|\dot u(\theta)\|_{L^2}\,d\theta; \|u(\theta)\|_{L^2}^2\le r,\ u(0)=f, u(1)=g\right\}.$$

この定義が意味をもつと仮定して議論を進めよう．$f,g\in L^2(\Omega)$, $\|f\|_{L^2}^2\le r, \|g\|_{L^2}^2\le r$ とする．$\varepsilon>0$ とする．このとき，$u_0(\theta)$ が存在して，$\|u_0(\theta)\|_{L^2}^2\le r$, $u_0(0)=f$, $u_0(1)=g$,

$$\int_0^1 \exp((b/2\kappa)\|u_0(\theta)\|_{L^2}^2)\|\dot u_0(\theta)\|_{L^2}\,d\theta < d_r(f,g)+\varepsilon.$$

$\tau>0$ とし，$t\in[0,\tau]$ とする．このとき，$R\ge r$ が存在して $\|u(t,\theta)\|_{L^2}^2\le R$ $(t\in[0,\tau])$. (8) により，$\displaystyle\int_0^1 \exp((b/2\kappa)\|u(t,\theta)\|_{L^2}^2)\|\dot u(t,\theta)\|_{L^2}\,d\theta\le e^{\omega_r t}(d_R(f,g)+\varepsilon)$ であるから，

$$d_R(S(t)f,S(t)g)\le e^{\omega_r t}d_R(f,g) \qquad (t\in[0,\tau]).$$

各 $r>0$ に対して，$M_r\ge 1$ が存在して，$\|u(\theta)\|_{L^2}^2\le r$ ならば

$$\|\dot u(\theta)\|_{L^2}\le \exp((b/2\kappa)\|u(\theta)\|_{L^2}^2)\|\dot u(\theta)\|_{L^2}\le M_r\|\dot u(\theta)\|_{L^2}$$

であるから，$f,g\in L^2(\Omega)$, $\|f\|_{L^2}^2\le r, \|g\|_{L^2}^2\le r$ に対して

$$\|f-g\|_{L^2}\le d_r(f,g)\le M_r\|f-g\|_{L^2}.$$

したがって，各 $\tau>0, r>0$ に対して，$L_{\tau,r}>0$ が存在して

$$\|S(t)f-S(t)g\|_{L^2}\le L_{\tau,r}\|f-g\|_{L^2} \quad (t\in[0,\tau], f,g\in L^2(\Omega), \|f\|_{L^2}^2\le r, \|g\|_{L^2}^2\le r).$$

Riemann metric d_r を決定することは難しいが，上の考察により，

$$V_r(u,v)=\exp((b/2\kappa)((\|u\|_{L^2}\wedge\sqrt{r})^2+(\|v\|_{L^2}\wedge\sqrt{r})^2))(\|u-v\|_{L^2}\wedge(2\sqrt{r})) \quad (u,v\in L^2(\Omega)) \tag{9}$$

を用いれば，$r>0$ に対して，$R>r$ を選べば，$u_0,v_0\in L^2(\Omega)$, $\|u_0\|_{L^2}^2\le r$, $\|v_0\|_{L^2}^2\le r$ のとき，十分小さな $\delta>0$ に対して

$$(d/dt)V_R(S(t)u_0,S(t)v_0)\le\omega(r)V_R(S(t)u_0,S(t)v_0) \qquad (t\in[0,\delta])$$

を得ることができる．さらに，

$$\varphi(u)=\|u\|_{L^2}^2 \quad (u\in L^2(\Omega)), \qquad g(r)=2\gamma r \quad (r\ge 0) \tag{10}$$

と定めれば，(7) により，

$$(d/dt)\varphi(S(t)u_0)\le g(\varphi(S(t)u_0)) \qquad (t\ge 0)$$

であり，$\|S(t)u_0\|_{L^2}^2$ を評価することはできる．この考察は，複素 Ginzburg-Landau 方程式の混合問題に応用するためには，抽象的設定の中に現れる V_r, φ, g として (9), (10) により定義されるものを選べばよいことを示唆している．

微分方程式系に関する適切性の問題は，1 つの方法として，2 つの解の差を測るための汎関数を選び，この汎関数に関して解の差が初期値の差に縮小的に依存することを示すことで解決できると考えられる．しかし，2 つの解の差を測るものとして，ノルムが用いられることが多く，その方法に対応する理論が単調作用素，縮小作用素半群の理論である．この意味において，縮小作用素半群に代わり『リプシッツ作用素半群』の研究が重要になるのではないだろうか．そこで，平滑性を持つリプシッツ作用素半群の理論構築を目指し，解析的半群の非線形摂動の問題を局所リプシッツ作用素半群の特徴づけの問題に翻訳して調べることから始めたい．

3．放物型半線形発展方程式に付随する局所リプシッツ作用素半群の特徴づけ

解析的半群の非線形摂動の問題に焦点を当て，その解作用素族が局所リプシッツ作用素半群になるための必要十分条件を調べよう．さらに， 得られる特徴づけを応用して，複素 Ginzburg-Landau 方程式の混合問題が時間大域的な C^1 級の解をもつことを示そう．

このような目的を達成するために，X をバナッハ空間とし, D を X の部分集合とし，X における半線形発展方程式の初期値問題

$$u'(t) = Au(t) + Bu(t) \quad (t>0), \qquad u(0) = u_0 \tag{SP; u_0}$$

を考える．この種の方程式に関する適切性の問題は，条件設定に相違はあるが，文献 [Am1, Am2], [C], [LM], [L], [OTeb], [Pr] などで調べられている．

この節では，A は, 定数 $M \geq 1$, $\omega_A < 0$ が存在して $\|T(t)\| \leq Me^{\omega_A t}$ $(t \geq 0)$ をみたす，X 上の (C_0) 級の解析的半群 $\{T(t); t \geq 0\}$ の無限小生成作用素とする．$\alpha \in (0,1)$ は定数とし, バナッハ空間 Y を $Y = D((-A)^\alpha)$, そのノルムを $\|v\|_Y := \|(-A)^\alpha v\|$ $(v \in Y)$ により定める．Y の部分集合 C を $C = D \cap Y$ により定め, B は C から X への非線形作用素とする．

この節の目的は，(SP; u_0) の時間大域的軟解を与える解作用素の族が局所リプシッツ作用素半群となるための必要十分条件について考察することである．

非線形作用素 B の局所連続性と増大条件を定めるために，条件 $(\varphi 1), (\varphi 2), (\varphi 3)$ をみたすベクトル値汎関数 $\varphi = (\varphi_i)_{i=1}^d$ を利用する．各 $r \in \mathbb{R}_+^d$ に対して，Y の部分集合 C_r を $C_r = D_r \cap Y$ により定める．

作用素 B に関して，つぎの条件 (B1), (B2), (B3) を仮定する．

(B1)　各 $r \in \mathbb{R}_+^d$ に対して, C_r は D_r において稠密である．

(B2)　各 $r \in \mathbb{R}_+^d$ に対して，B は C_r から X への作用素として連続である．

(B3)　各 $r \in \mathbb{R}_+^d$ に対して，$M_B(r) > 0$ が存在して　$\|Bv\| \leq M_B(r)(1+\|v\|_Y)$　$(v \in C_r)$.

定理 2． ベクトル値汎関数 $\varphi = (\varphi_i)_{i=1}^d$ は条件 $(\varphi 1), (\varphi 2), (\varphi 3)$ を，作用素 B は条件 (B1), (B2), (B3) を，$g \in C(\mathbb{R}_+^d; \mathbb{R}^d)$ は条件 (g1), (g2), (g3) をみたすと仮定する．このとき，つぎの (i), (ii) は同値である：

(i)　条件 (S4) をみたす φ に関する D 上の局所リプシッツ作用素半群 $\{S(t); t \geq 0\}$ が存在して，$BS(\cdot)x \in C([0,\infty); X)$ $(x \in C)$, $BS(\cdot)x \in C((0,\infty); X) \cap L^1_{loc}(0,\infty; X)$ $(x \in D)$，および，つぎの積分方程式をみたす：

$$S(t)x = T(t)x + \int_0^t T(t-s)BS(s)x\,ds \quad (x \in D,\ t \geq 0).$$

(ii)　以下の 3 条件 (ii-1), (ii-2), (ii-3) がみたされる：

(ii-1)　$\tau > 0$ と $[0,\tau] \times X \times X$ 上の非負値汎関数の族 $\{V_r(\cdot,\cdot,\cdot); r \in \mathbb{R}^d_+\}$ が存在して，条件 (V1), (V2), (V3) をみたす.

(ii-2)　各 $r \in \mathbb{R}^d_+$ に対して，$R \geq r$ をみたす $R \in \mathbb{R}^d_+$ と $\omega \geq 0$ が存在して，

$$\liminf_{h \downarrow 0} (V_R(t+h, T(h)x + \textstyle\int_0^h T(s)Bx\,ds, T(h)y + \int_0^h T(s)By\,ds) - V_R(t,x,y))/h$$
$$\leq \omega V_R(t,x,y) \qquad ((t,x,y) \in [0,\tau) \times C_r \times C_r).$$

(ii-3)　定数 $\beta \in (0,1)$ が存在して，各 $x \in C$, $\varepsilon > 0$ に対して $\delta \in (0,\varepsilon]$, $x_\delta \in C$, $z_\delta \in Y$ が存在して，

$$x_\delta = T(\delta)x + \int_0^\delta T(s)Bx\,ds + z_\delta, \quad \|z_\delta\| \leq \varepsilon\delta, \quad \|z_\delta\|_Y \leq \varepsilon\delta^\beta,$$
$$(\varphi(x_\delta) - \varphi(x))/\delta \leq g^\varepsilon(\varphi(x)).$$

但し，$g^\varepsilon(r) = (g_i^\varepsilon(r))_{i=1}^d, \quad g_i^\varepsilon(r) = g_i(r) + \varepsilon \ \ (1 \leq i \leq d)$.

この場合，さらに，各 $\rho > 0$ に対して，$L_B(\rho) > 0$ が存在して

$$\|Bu - Bv\| \leq L_B(\rho)\|u - v\|_Y \qquad (u, v \in Y,\ \|u\|_Y \leq \rho,\ \|v\|_Y \leq \rho)$$

が満たされるならば，各 $x \in D$ に対して，抽象的コーシー問題 (SP; x) は，各 $\tau > 0$ に対して $r \in \mathbb{R}^d_+$ が存在して $u(t) \in C_r$ $(t \in (0,\tau])$ をみたす一意解 $u(t) = S(t)x \in C([0,\infty);X) \cap C^1((0,\infty);X) \cap C((0,\infty);[D(A)])$ をもつ.

必要性の証明の概略を述べよう．命題 1 の条件 (i), (ii) が成り立つ．条件 (ii-1) は，命題 1 の条件 (i) に他ならない．条件 (ii-2), (ii-3) をチェックするために，$r \in \mathbb{R}^d_+$, $(t,x,y) \in [0,\tau) \times C_r \times C_r$ とする．命題 1 の条件 (ii) を用いると，$R \geq r$ なる $R \in \mathbb{R}^d_+$, $\omega \geq 0$ が存在して，

$$\liminf_{h \downarrow 0} (V_R(t+h, T(h)x + \textstyle\int_0^h T(s)Bx\,ds, T(h)y + \int_0^h T(s)By\,ds) - V_R(t,x,y))/h$$
$$\leq \omega V_R(t,x,y) + L(R) \limsup_{h \downarrow 0} (\|T(h)x + \textstyle\int_0^h T(s)Bx\,ds - S(h)x\|$$
$$+ \|T(h)y + \textstyle\int_0^h T(s)By\,ds - S(h)y\|)/h$$

である．$BS(\cdot)x : [0,\infty) \to X$ は連続であるから，

$$h^{-1}(T(h)x + \textstyle\int_0^h T(s)Bx\,ds - S(h)x) = h^{-1}\int_0^h T(h-s)(Bx - BS(s)x)\,ds \to 0 \qquad (h \downarrow 0)$$

である．よって，条件 (ii-2) が成り立つ．条件 (ii-3) をチェックするために，$x \in C$ とする．このとき，$BS(\cdot)x \in C([0,\infty);X)$ である．$T(h)x + \int_0^h T(s)Bx\,ds - S(h)x \in D((-A)^\alpha)$

であり,

$$\begin{aligned}
&\left\|(-A)^\alpha\left(T(h)x+\int_0^h T(s)Bx\,ds-S(h)x\right)\right\| \\
&\quad\le \int_0^h \|(-A)^\alpha T(h-s)(Bx-BS(s)x)\|\,ds \\
&\quad\le (1-\alpha)^{-1}M_\alpha \sup_{0\le s\le h}\|Bx-BS(s)x\|\cdot h^{1-\alpha} \qquad (h>0)
\end{aligned}$$

である. $S(h)x\in C$ $(h>0)$ であり, 条件 (S4) により $\limsup_{h\downarrow 0}(\varphi_i(S(h)x)-\varphi_i(x))/h\le \limsup_{h\downarrow 0}(m_i(h;\varphi(x))-m_i(0;\varphi(x)))/h=g_i(\varphi(x))$ $(1\le i\le d)$ であるから, 条件 (ii-3) は $\beta=1-\alpha$, $x_\delta=S(\delta)x$ で満たされる.

複素 Ginzburg-Landau 方程式の混合問題

$$\text{(CGL)}\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}-(\lambda+i\mu)\Delta u+(\kappa+i\nu)|u|^{q-2}u-\gamma u=0 & ((x,t)\in\Omega\times(0,\infty)), \\ u(x,t)=0 \qquad ((x,t)\in\partial\Omega\times(0,\infty)), & \\ u(x,0)=u_0(x) \qquad (x\in\Omega) & \end{cases}$$

を考えよう. 但し, $\partial\Omega$ は $\mathbb{R}^N$ の領域 Ω の滑らかな境界を表し, $\lambda>0$, $\kappa>0$, $\mu,\nu,\gamma\in\mathbb{R}$ とする. さらに, q はつぎの条件を満たすと仮定する.

$$2\le q\le 2+4/N.$$

定理 3. 任意の初期値 $u_0\in L^2(\Omega)$ に対して, (CGL) はつぎのクラスの解 u を一意的にもつ.

$$C([0,\infty);L^2(\Omega))\cap C^1((0,\infty);L^2(\Omega))\cap C((0,\infty);H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)).$$

さらに, 次のような解の初期値に関する連続依存性が成り立つ: v を初期値が $v_0\in L^2(\Omega)$ である上述のクラスの解とする. このとき, 各 $\tau,r>0$ に対して $M(\tau,r)>0$ が存在して

$$\|u(t)-v(t)\|_{L^2}\le M(\tau,r)\|u_0-v_0\|_{L^2} \quad (t\in[0,\tau],\ u_0,v_0\in L^2(\Omega),\ \|u_0\|_{L^2}\le r, \|v_0\|_{L^2}\le r).$$

(定理の証明の概略) $X=L^2(\Omega)$ とし, X における作用素 A を

$$Au=(\lambda+i\mu)(\Delta u-u) \qquad (u\in D(A)=H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)) \tag{11}$$

により定める. このとき, A は X 上の (C_0) 級の解析的半群 $\{T(t);t\ge 0\}$ の無限小生成作用素であり, 評価 $\|T(t)\|\le e^{-\lambda t}$ $(t\ge 0)$ が成り立つ.

もし抽象的設定に現れる D, φ, $\alpha\in(0,1)$ を

$$Bu=-(\kappa+i\nu)|u|^{q-2}u+(\lambda+i\mu+\gamma)u \qquad (u\in C:=D\cap Y) \tag{12}$$

により定められる作用素 B が C から X への作用素であり, 条件 (B3) を満たすように決定できれば, (CGL) は半線形発展方程式の初期値問題 (SP) に翻訳され, 定理 2 を適用できる. これを実行するために, つぎの 2 つの場合に分けて考察する.

$$\text{(I)} \qquad 2\le q<2+4/N, \tag{13}$$

$$\text{(II)} \qquad q=2+4/N.$$

ここでは，(I) の場合についてのみ紹介することにしよう． $D = L^2(\Omega)$ とし，汎関数 $\varphi : D \to \mathbb{R}_+$ を

$$\varphi(u) = \|u\|^2 \qquad (u \in D)$$

により定め， $\alpha \in (0,1)$ をつぎのように選ぶ:

$$(q-1)\theta < \alpha < 1. \tag{14}$$

但し $\theta = (N/2)\,(1/2 - 1/2(q-1))$ である．(13) により $0 \le (q-1)\theta < 1$ であるから，上のように α を選ぶことは可能である．容易に分かるように，汎関数 φ は条件 $(\varphi 1)$，$(\varphi 2)$，$(\varphi 3)$ をみたす．条件 (B3) をチェックするために，つぎの補題を必要とする．

補題 4. Z をバナッハ空間とする．$\theta, \gamma \in [0,1)$, $K_0 > 0$ とし，F をつぎの条件を満たす $D(A)$ から Z への線形作用素とする．

$$\|Fx\|_Z \le K_0 \|(-A)^\gamma x\|^{1-\theta} \|Ax\|^\theta \qquad (x \in D(A)). \tag{15}$$

このとき，$\gamma + \theta(1-\gamma) < \sigma < 1$ ならば，線形作用素 $\widetilde{F} : D((-A)^\sigma) \to Z$ が存在して，

$$\begin{cases} \widetilde{F}x = Fx \qquad (x \in D(A)), \\ \|\widetilde{F}x\|_Z \le K_{\sigma,\theta,\gamma} \|(-A)^\gamma x\|^{1-\theta(1-\gamma)/(\sigma-\gamma)} \|(-A)^\sigma x\|^{\theta(1-\gamma)/(\sigma-\gamma)} \quad (x \in D((-A)^\sigma)). \end{cases}$$

条件 (B3) のチェックに移ろう．Gagliardo-Nirenberg 不等式により，$H^2(\Omega) \subset L^{2(q-1)}(\Omega)$ であり

$$\|u\|_{L^{2(q-1)}} \le K_0 \|u\|^{1-\theta} \|u\|_{H^2}^\theta \le K_0 \|u\|^{1-\theta} \|Au\|^\theta \quad (u \in D(A)).$$

(14) であるから，補題 4 を $Z = L^{2(q-1)}(\Omega), \gamma = 0$, $\sigma = \alpha$ で用いることができるので，$Y := D((-A)^\alpha) \subset L^{2(q-1)}(\Omega)$,

$$\|u\|_{L^{2(q-1)}} \le K_0 \|u\|^{1-\theta/\alpha} \|(-A)^\alpha u\|^{\theta/\alpha} \qquad (u \in Y). \tag{16}$$

よって，(12) により定義される作用素 B は C を X に写す．

$$\left||\xi|^{q-2}\xi - |\eta|^{q-2}\eta\right| \le K_0 \left(\int_0^1 |\theta\xi + (1-\theta)\eta|^{q-2}\, d\theta \right) |\xi - \eta| \qquad (\xi, \eta \in \mathbb{C}) \tag{17}$$

であるから，$u, v \in C$ に対して

$$\|Bu\| \le (\kappa^2 + \nu^2)^{1/2} \|u\|_{L^{2(q-1)}}^{q-1} + \omega_B \|u\|, \tag{18}$$

$$\|Bu - Bv\| \le K_0 (\|u\|_{L^{2(q-1)}} \vee \|v\|_{L^{2(q-1)}})^{q-2} \|u - v\|_{L^{2(q-1)}} + \omega_B \|u - v\| \tag{19}$$

が成り立つ．但し $\omega_B = ((\lambda+\gamma)^2 + \mu^2)^{1/2}$ である．(18), (16), (14) により，

$$\begin{aligned} \|Bu\| &\le K_0 \|u\|^{(1-\theta/\alpha)(q-1)} \|(-A)^\alpha u\|^{(q-1)\theta/\alpha} + \omega_B \|u\| \\ &\le K_0 \|u\|^{(1-\theta/\alpha)(q-1)} (1 + \|(-A)^\alpha u\|) + \omega_B \|u\| \end{aligned}$$

であり，作用素 B は条件 (B3) を満たす．(19), (16) により，作用素 B はつぎの局所リプシッツ条件をみたす: 各 $\rho > 0$ に対して $L_B(\rho) > 0$ が存在して

$$\|Bu - Bv\| \le L_B(\rho) \|u - v\|_Y \quad (u, v \in Y,\ \|u\|_Y \le \rho, \|v\|_Y \le \rho).$$

さて，定理 2 の条件 (ii) をチェックしよう．そのために，先の考察をもとに， $\tau > 0$ とし，各 $r \in \mathbb{R}_+$ に対して，汎関数 $V_r : [0,\tau] \times X \times X$ を

$$V_r(t,u,v) = \exp((b/2\kappa)((\|u\| \wedge \sqrt{r})^2 + (\|v\| \wedge \sqrt{r})^2)(\|u-v\| \wedge (2\sqrt{r})) \qquad (20)$$

により定める．条件 (ii-1) が満たされることは容易に確かめられる．条件 (ii-2)，(ii-3) をチェックするために， $u_0 \in C$ とし，$u_h = T(h)u_0 + \int_0^h T(s)Bu_0\,ds$ $(h > 0)$ と定める．このとき， $h > 0$ に関して u_h は微分可能であり，$u_h \in D(A)$, $u_h' = Au_h + Bu_0$ $(h > 0)$ が成り立つ．$f_h = Bu_0 - Bu_h$ $(h > 0)$ とおけば， $\lim_{h\downarrow 0}\|f_h\| = 0$， $\lim_{h\downarrow 0}\|(-A)^\alpha(u_h - u_0)\| = 0$ であり，

$$u_h' = Au_h + Bu_h + f_h \qquad (h > 0) \qquad (21)$$

が成り立つ．この u_h について，解の初期値に関する連続依存性の導出と同様の議論をすれば，条件 (ii-2), (ii-3) が満たされる．このようにして定理 2 の条件 (ii) をチェックできるので，定理 2 により所要の結果を得る．

参考文献

[Am1] H. Amann, Linear and Quasilinear Parabolic Problems, Vol.1, Birkhäuser Verlag, 1995.

[Am2] H. Amann, Invariant sets and existence theorems for semilinear parabolic and elliptic systems, J. Math. Anal. Appl. **65** (1978), 432–467.

[C] Z-M. Chen, A remark on flow invariance for semilinear parabolic equations, Israel J. Math. **74** (1991), 257–266.

[LM] J. H. Lightbourne III and R. H. Martin,Jr., Relatively continuous nonlinear perturbations of analytic semigroups, Nonlinear Anal., TMA **1** (1977), 277–292.

[L] A. Lunardi, Analytic Semigroups and Optimal Regularity in Parabolic Problems, Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications **16**, Birkhäuser Verlag, Basel, 1995.

[OTeb] S. Oharu and D. Tebbs, Locally relatively continuous perturbations of analytic semigroups and their associated evolution equations, Japan J. Math. **31** (2005), 97–129.

[Pr] J. Prüss, On semilinear parabolic evolution equations on closed sets, J. Math. Anal. Appl. **77** (1980), 513–538.

[YO] T. Yokota and N. Okazawa, Smoothing effect for the complex Ginzburg-Landau equation (general case), Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst. Ser. A Math. Anal. **13B** (2006), suppl., 305–316.